

独楽の力学

佐藤誠*

Mechanics of spinning tops

Makoto SATO

Mechanics of a spinning solid body which is rotating around an axis that is not a principal axis of inertia is very intricate. This report shows that, to analyze rotating motions of a cylinder or a disk on a flat floor, a formula of precession period of tops could act as Euler's equation of motion and this makes analytical models to be understood easily. Applying this idea, limitation of standing angle for a spinning cylinder and speed divergence of contact point of a spinning disk are well demonstrated qualitatively. To clear quantitative disagreement the analytical models should be improved.

Key Words : Top, Angular momentum, Moment of inertia, Precession, Kinetic energy

1. はじめに

本学3年生を対象に開講される自発的学習科目「チャレンジゼミナール」¹⁾は2014年度で5年目になる。受講する学生も担当する教員も授業展開に慣れ成果が外部で評価される段階にレベルアップしてきている。

報告者が担当する物理系のゼミでは、初年度は数理科学的な題材を扱い、次年度に天文関連²⁾、3年目に玩具、4、5年目にあたる昨年一昨年は独楽を題材とした。独楽を題材に選んだきっかけはその年、岩波新書から戸田盛和著「コマの科学」³⁾が復刻されたことにある。この書籍を教科書に実際に物を作り実験をしながらコマについて考察を深めることを目指した。1年目は、コマの軸の形状効果や独楽の形など基本的なことに着目して観察や解析を進めた。その結果、独楽を安定に回すための条件がおおよそ了解でき、任意形状のじゃがいもを独楽にする方法を明らかにすることができた。また、通常は独楽にならないと思われる鉛筆も独楽として安定に回せることを明らかにした。さらに独楽類似の回転体として、円柱や円板の水平面上での回転運動の解析に取り組んだ。この解析は、回転ゆで卵の立ち上がりの問題と関連していることが徐々に判明し、2年目には不正確ではあるがある程度定量的な解析ができるまでに達した。この解析手法の問題点を洗い出す目的で、さらに複雑な回転現象である皿回しとフラフープに適用して解析結果を分析した。この結果を物理学会 Jr.セッションに報告し優秀賞の評価を得た。しかしながら、解析方法はまだ不完全で実測

とのずれが明らかになり、さらに回転たまごの立ち上がりの説明にいまだに窮している状態である。

本報告は、この皿回しやフラフープの解析に用いた現時点で理解できている独楽の解析方法を整理した記録である。したがって、以下に示すモデルや計算に不備が含まれていることを許容いただきたい。今後これらをもとにモデルを精密化し、実測値を説明できる解析方法を学生と協力して開発したい。その時には、回転ゆで卵の立ち上がり、類似の逆立ち独楽の運動についても解明できるものと期待している。

2. 独楽の歳差運動

以下の議論の基本となる通常の軸対称独楽について復習する。図1は下端が1点に固定され軸が水平面から θ ほど立ち上がって回転している独楽を表す。独楽が回転していなければ重力によるトルクで

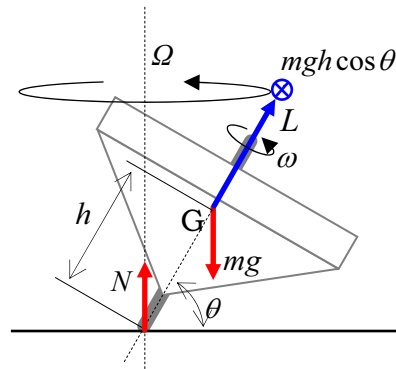


Fig. 1 A basic model of an ordinary top that has a symmetry around a rotational axis.

原稿受付 平成27年9月1日

*一般科目 satom@tsuyama-ct.ac.jp

θ が減少する方向に軸が倒れる．ところが独楽が回転していると，回転体の運動方程式から，角運動量 L の変化は剛体にはたらくトルク M に等しいことが要請される．すなわち，

$$\frac{dL}{dt} = M \quad (1)$$

と表される．重力によるトルクは常に x - y 平面に水平である．そのため角運動量は上に開いた円錐を描くように時間変化する．この独楽では回転軸と角運動量 L の向きは一致しているので，軸も逆円錐を描くように回転する．これが独楽の歳差運動である．歳差運動の周期 T は角運動量ベクトル L の先端が描く円周の長さを単位時間の角運動量の変化すなわち重力によるトルク M の大ききで割り算することで容易に求まる．

$$T = \frac{2\pi L \cos \theta}{M} \quad (2)$$

上記対称独楽は，角速度 ω と角運動量 L の方向が一致しているので分かりやすいが，回転する円柱や円板，皿回し，回転ゆで卵では一般的には一致しない．このことが運動解析を面倒なものにしている．

任意の剛体には重心を共有する慣性主軸と呼ばれる直交する3つの特殊な軸が存在する．形状に対称性が認められる場合はこの慣性主軸は容易に確認できる．この慣性主軸のひとつのまわりに回転させる場合には軸に対して遠心力によるトルクは発生しない．ところが，慣性主軸からずれた軸回りに回転させると質量の不均衡のため回転軸に偶力がはたらく．この偶力は角運動量の時間変化を与えるので，したがって角運動量は回転軸の回りを物体と一緒に回転することになる．

解析に際して技術的な問題が2つあることが分かる．ひとつは，慣性主軸からずれた回転軸回りの慣性モーメントの計算である．ここで取り扱う回転体は，固定軸回りに強制的に回転させている訳ではないので軸にはたらく偶力を軸受からの抗力で相殺されることはなく，慣性モーメントは3行3列の行列（慣性テンソル）として非対角項（慣性乗積）も有限な値を持つ極めて面倒な状況となる．まずはこの傾いて回転する場合の慣性テンソルを算出することが要求される．ちなみに，この遠心力による偶力の向きは正転，逆転に依らないので慣性テンソルは対称行列となる．

問題の2つ目は，式(1)の回転の運動方程式が物

体の回転と共に方向を変える困難である．このままではとても解けない．これを解決する方法として，物体に固定した座標系（剛体系）で運動方程式を書きなおすということが通常行われる．剛体系の角運動量を L' とすると，式(1)は次式に変換される．

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{dL}{dt} - \Omega \times L \quad (3)$$

ここで Ω は剛体系回転角速度である．この導出は補記に記す．角速度 Ω で回転する座標系から見た任意のベクトルの時間変化から求めることができる．

この関係式はオイラーの運動方程式と呼ばれるもので，回転体の解析には不可欠のものである．しかし，高専生の学習レベルを超えており，立式の時点で物理的意味合いがイメージできないという問題がある．そもそも独楽の解析は古典力学の範疇で2百年前にすでに明らかになっており新規性はない．チャレンジゼミナールで題材として取り上げる目的は高専生の学習レベルで理解できる説明を見つけたことにある．したがって，オイラーの運動方程式に頼るのはここでの趣旨に反する．

円柱の回転をモデル化するにあたり関係式を抽出して検討してみると，オイラーの運動方程式を用いずに必要な関係式のセットを構成することに気付いた．当初これは不思議なことに思えたが以下の考察で了解された．

オイラーの運動方程式を図1の独楽に適用すると，トルクは常に y 方向，角運動量は x - z 面内にあり一定であることが分かる．したがって，

$$\Omega L \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = mgh \cos \theta \quad (4)$$

の関係が得られる．これを変形すると，

$$\frac{2\pi L \cos \theta}{mgh \cos \theta} = \frac{2\pi}{\Omega}$$

$$\frac{2\pi L \cos \theta}{M} = T \quad (5)$$

となり，歳差運動の周期の関係式になる．このことからオイラーの運動方程式は，角運動量が剛体系で変化せず，トルクが水平面内にある場合は，式(2)の歳差運動の周期を表す関係式と同等であることが了解される．歳差運動の周期はイメージしやすく関

係式の導出は直感的で分かりやすい．ここで取り扱う問題はいずれもこの条件を満足しているか，満足していると近似できるので，オイラーの運動方程式と等価な関係式として歳差運動の周期の関係式を用いることが許容される裏付けが得られたことになる．

3. 慣性テンソルの回転座標変換

剛体を慣性主軸からずれた軸回りに回転させたときの慣性テンソルは以下のように算出できる．遠心力によるトルクの見積もりや回転の運動エネルギーを算出する際に慣性テンソルが必要になるため座標変換の手順をここに示す．

図2に示す円柱を例に算出方法を説明する．図のように y 軸回りに $\pi/2 - \theta$ ほど回転することになるので回転行列 \mathbf{R} はつぎのとおりである．ここでの座標は剛体の対称軸を z 軸に選び，剛体の鉛直軸回りの回転に一致して回転する右手系直交座標である．重心が原点である．

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\theta & 0 & \sin\theta \end{pmatrix} \quad (7)$$

剛体に固定された x, y, z 軸回りの主慣性モーメントをそれぞれ I_x, I_y, I_z とすると慣性テンソルは次のように対角行列で表される．

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (8)$$

座標の回転によって \mathbf{L} が \mathbf{L}' に $\boldsymbol{\omega}$ が $\boldsymbol{\omega}'$ に座標変換されるとすると，

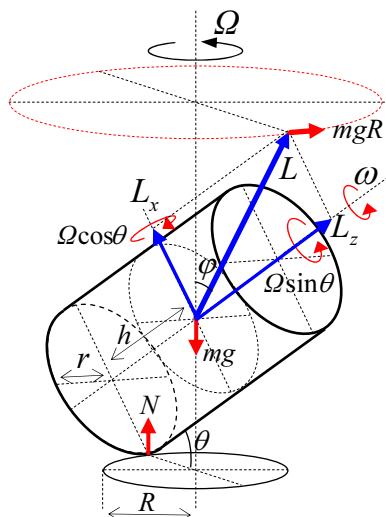


Fig. 2 An analytical model of a spinning cylinder.

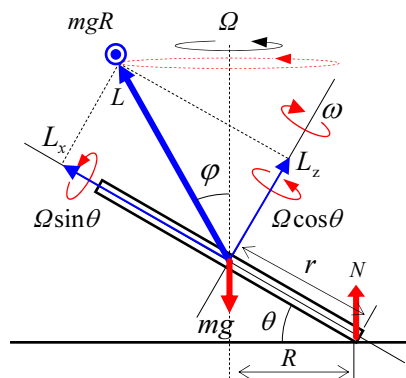


Fig. 3 An analytical model of a spinning disk.

$$\mathbf{L}' = \mathbf{R} \mathbf{L} \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\omega}' = \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}$$

である． $\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$ より，

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \mathbf{L} &= \mathbf{R} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{R} \mathbf{L} &= \mathbf{R} \mathbf{I} \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\omega}' \\ \mathbf{L}' &= \mathbf{R} \mathbf{I} \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\omega}' \end{aligned} \quad (10)$$

となる．したがって，慣性テンソルは次のように変換される．

$$\mathbf{I}_\theta = \mathbf{R} \mathbf{I} \mathbf{R}^{-1} \quad (11)$$

もちろん \mathbf{I}_θ は対称行列となる．以上で計算のための準備が整ったことになる．

4. 平面上で回転する円柱と円板

乾電池をテーブルの上で回転させると傾いた状態でひとところに留まって安定に回転する様子が観察される．円柱の回転とはこのような運動である．また，円板の回転は，何かの拍子にコインや瓶の蓋など円板状のものが傾いてカタカタと回転する現象である．傾きが減じて円板が水平に近づくとき回転が速くなる音が音から判断される．円柱の回転も円板の回転も興味深い運動である．

図2と図3に円柱と円板の回転のモデルを示す．この図をもとに関係式のセットを書き下すと，円柱については以下の9つの関係式が得られる．

$$\begin{aligned} \omega_x &= \Omega \cos\theta \\ \omega_z &= \Omega \sin\theta + \omega \\ L_x &= I_x \omega_x \\ L_z &= I_z \omega_z \\ L &= \sqrt{L_x^2 + L_z^2} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tan(\theta + \varphi) &= \frac{L_z}{L_x} \\ v = r\omega &= R\Omega \\ R &= h \cos \theta - r \sin \theta \\ T &= \frac{2\pi L \sin \varphi}{mgR} = \frac{2\pi}{\Omega} \end{aligned} \quad (12\text{続き})$$

最初の行の角速度の2つの式は全体の角速度 Ω と円柱に固定した x, z 軸回りの角速度の関係を表す。 ω は z 軸回りの独立した回転である。これら角速度の関係が最も了解し辛い。円柱では物体に固定した座標系で z 軸まわりの角速度 ω_z が歳差運動の成分と床との接触回転による ω の和となるが、後述する円板では減算になり、不思議なことにキャンセルして0になるようで直感的に了解し難い。モデルに誤りがあるとすればこの関係式の可能性が高い。続く3行の角運動量に関する4つの式は通常の関係式で疑問点はない。5行目の7番目の v の式は床との接点の移動速度の関係式である。下から2行目8番目の式は幾何学的な関係を表す。最後の9番目の式が、オイラーの運動方程式に対応する歳差運動の周期を表す式である。重力によるトルクのみを考慮しているが、主軸から外れた軸回りで回転する際の慣性乗積に関わる遠心力による偶力を加算する必要があるかもしれない。この点は今後の課題である。式の中に暗に含まれている可能性もある。ここでは明示的には含めない。

このモデルでは、床との接点は滑らずに転がることを条件としている。また、重心の回転軸は変化しないと仮定している。そのため、床からの摩擦は無いと仮定している。実際に円柱の回転を高速度カメラで撮影して観察すると、この仮定は妥当なことが分かる。これら9つの関係式から、歳差運動すなわち垂直軸回りの回転運動の角速度 Ω を定数と円柱が床となす角度 θ で表すと以下ようになる。

$$\Omega = \frac{mg(h \cos \theta - r \sin \theta)}{\sqrt{I_x \sqrt{1 + \left(\frac{h I_z}{r I_x}\right)^2} \cdot \cos \theta \cdot \sin \left(\tan^{-1} \frac{h I_z}{r I_x} - \theta\right)} \quad (13)$$

同様に円板についても、次の9つの関係式を得る。

$$\begin{aligned} \omega_x &= \Omega \sin \theta \\ \omega_z &= \Omega \cos \theta - \omega \\ L_x &= I_x \omega_x \\ L_z &= I_z \omega_z \end{aligned} \quad (14)$$

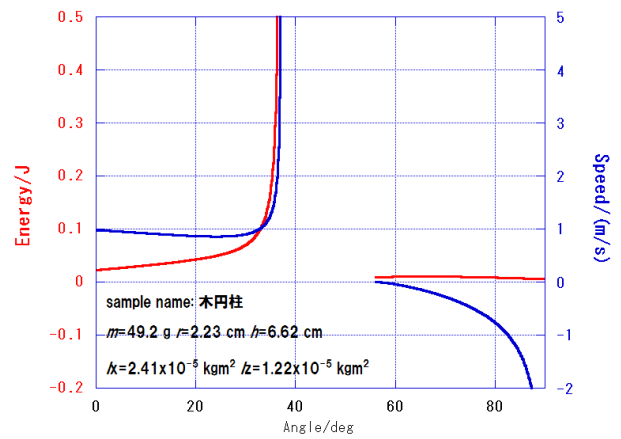


Fig. 4 Calculated results for a wooden cylinder.

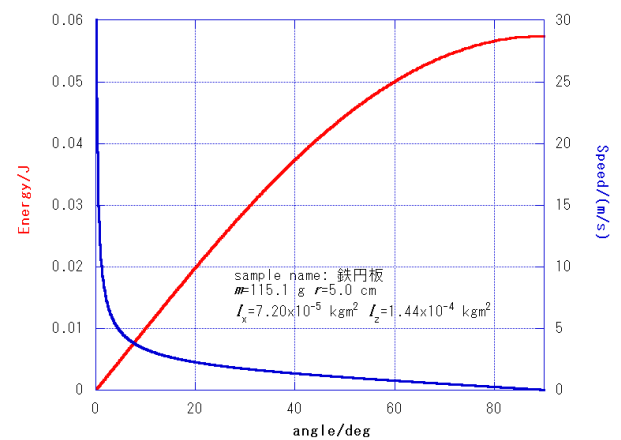


Fig. 5 Calculated results for a steel disk.

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{L_x^2 + L_z^2} \\ \tan(\theta + \varphi) &= \frac{L_x}{L_z} \\ v = r\omega &= R\Omega \\ R &= r \cos \theta \\ T &= \frac{2\pi L \sin \varphi}{mgR} = \frac{2\pi}{\Omega} \end{aligned} \quad (14\text{続き})$$

円板は円柱の薄い極限としてみなされるので、ともに軸対称の軸を z 軸に揃えた。ただし、角度の設定が互いに補角になっているため \sin と \cos が反転している他、 ω の符号が逆転していること、幾何学的関係が異なることなどの違いがある。

円板の場合の角度 θ と角速度 Ω の関係は(14)の関係式のセットから以下のように算出される。

$$\Omega = \frac{mgr}{\sqrt{I_x \sin \theta}} \quad (15)$$

円柱の式(13)で、 $h = 0$, $\theta = \pi/2 - \theta$ と置換すれば

同じ関係式が導けることから円柱と円板のモデルは整合していることが了解される。

5. 計算結果と考察

上記式(13)と式(15)にしたがい角度 θ に対する角速度 Ω を具体的に計算した。角速度 Ω をもとに床との接点の速度 v と力学的エネルギー E を算出し、図4と図5にそれぞれ結果を示す。計算には十進BASICを用いた⁴⁾。接点の速度 v を求めたのは、回転運動の観察に床との接触で発生する音が分かりやすいからである。円柱の回転を表す図4中のグラフを描いていない角度範囲では計算値は得られるが意味があるようには思えないので削除した。おそらく安定な解が存在しない領域であろうと思われる。このあたりもさらに検討が必要である。

円柱の力学的エネルギーの算出は以下の式による。

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 \\
 &\quad + mg(h \sin \theta + r \cos \theta - r) \\
 &= \frac{1}{2} I_x \Omega^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} I_z (\Omega \sin \theta + \omega)^2 \\
 &\quad + mg(h \sin \theta + r \cos \theta - r) \quad (16)
 \end{aligned}$$

第1項と第2項を具体的に計算すると物体に固定した剛体系で算出した値と同じになることが確認できる。

同様に円板の力学的エネルギーの算出は以下の式による。

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} I_x \Omega^2 \sin^2 \theta + mgr \sin \theta \\
 &= \frac{3}{2} mgr \sin \theta \quad (17)
 \end{aligned}$$

解析に用いたモデルは床との摩擦がないことを条件にしているため、エネルギー散逸のないモデルである。つまり、定常的に回転し続けている状態で力学的エネルギー E と立ち上がり角度 θ の関係を算出していることを意味する。実際には摩擦のために力学的エネルギーは減少するし、回し初めでは定常状態よりも高速に回転して接点が滑り床からの摩擦を受けるので、このグラフの関係からは逸れる。ある力学的エネルギーを与えられた円柱は、床との摩擦でエネルギーを失い、自動的にグラフに示す定常状態に移行すると思われる。定常状態では接点の滑り

がないので力学的エネルギーは保存される。実際には床との転がり摩擦、空気抵抗などで徐々にエネルギーを失い、グラフの曲線に沿って立ち上がり角度 θ が減少して最終的には横倒しになると思われる。興味深いのは、立ち上がり角度 θ の低い領域で接点の速度が θ の減少に伴ってわずかに増加する点である。この現象は単一乾電池のように円柱の高さに対して半径が比較的大きい場合に観察される。単三乾電池のように細い円柱では見られない。これは計算と観察が一致する点である。

円柱の場合、力学的エネルギーが発散する立ち上がり角度が存在することが分かる。つまり、どんなに高速に回転させてもこの角度以上には円柱は立ち上がらないことを意味する。実際、この角度は観察できる。勢い良く回転する円柱を側面から撮影して立ち上がり角度を計測するとこの限界となる角度を計測できる。しかし、実測値は計算値より明らかに低い角度になる傾向がある。どんなに勢いよく回転させても計算で予想される角度まで立ち上がらない。当初は計測上の問題、あるいは摩擦の影響と思われたが、計算モデルに問題があると考えたほうが良さそうである。

円板では伏せる直前に接点の速度が発散することを計算で再現できた。興味深いことに、円柱の立ち上がり角度の高角度領域で、この円板の回転運動が、角速度が負になる形で計算結果に現れる点である。モデルの妥当性がこのことから了解できる。円柱の場合、おそらく重心が接点の描く円の外側にあるか内側にあるかで回転モードが変化するものと思われる。力学的エネルギーが発散する立ち上がり角度と円板回転モードに移行する角度の間では定常的な回転は禁止されているのではないかと推測している。

6. まとめ

円柱や円板を水平な床上で回転させると、回転軸が慣性主軸からずれるため解析が困難になる。難解で抽象的な解析力学を用いれば解けるが、反面、物理的イメージが掴みにくい難点がある。高専生でも直感的に了解できる説明を求めて力学的モデルを模索している。ここでは、オイラーの運動方程式の代わりに独楽の歳差運動の周期の関係式が使えることを明らかにした。

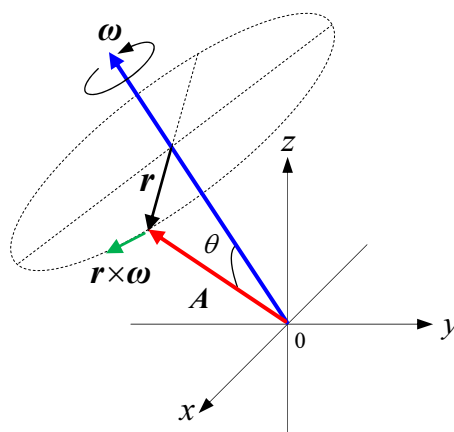
円柱の回転に適用して、立ち上がり角度に限界値があることを計算で再現できた。また、高角度側で円板と同じ回転モードになることを計算で明らかにした。

円板の回転に適用して、停止直前に接点の速度が発散することを再現できた。

しかしながら、計算値と実測の間にはずれがあることを認識している。今後、正確な計測を行い計算値とのずれを明確にして、解析モデルの精密化を図りたい。

参考文献

- 1) 江原他, 「3年次自発的科目「チャレンジセミナー」の銅美優と課題」, pp.79-86, 津山高専紀要, 第52号, 2010.
- 2) 岡本他, 「水平線俯角による地球半径測定」, pp.45-50, 津山高専紀要, 第53号, 2011.
- 3) 戸田盛和, 「コマの科学」, pp.105-106, 岩波新書, 東京, 1980.
- 4) 「十進BASIC」 Webページ: <http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/>.



補記

角速度 ω で回転する座標系から見た任意のベクトル A の時間変化について考える。

図から、微小な時間 Δt 後のベクトル A は回転する座標系からは、以下のように表せる。

$$A' = A - (\omega \times r)t \quad (\text{補1})$$

両辺を微分して、

$$\frac{dA'}{dt} = \frac{dA}{dt} - \omega \times r \quad (\text{補2})$$

となる。図からベクトル A は次のように表せる。

$$A = A \cos \theta \cdot \frac{\omega}{\omega} + r \quad (\text{補3})$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{dA'}{dt} &= \frac{dA}{dt} - \omega \times \left(A - A \cos \theta \cdot \frac{\omega}{\omega} \right) \\ &= \frac{dA}{dt} - \omega \times A \end{aligned} \quad (\text{補4})$$

となる。したがって角速度 Ω で回転する座標系で見た角運動量 L' の時間変化は、

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{dL}{dt} - \Omega \times L \quad (\text{補5})$$