準静止衛星の軌跡

佐藤誠*

Trajectory of quasi-geostationary satellites

Makoto SATO

A procedure for calculating trajectory of quasi-geostationary satellites is demonstrated. Satellite orbit is calculated based on the Kepler's law. A way of obtaining trajectory of the orbit in the sky observed from arbitrary point on the Earth is explained. Influence on the trajectory by orbit eccentricity and tilting angle to equatorial plane is under consideration.

Key Words： Kepler's law, Quasi-zenith satellite, Geostationary satellite, Orbit, Trajectory

１．はじめに

全地球測位システム（GPS）はスマートフォン上のマップや車載ナビゲーションなどのサービスを支える馴染みの深い社会インフラの一つである．元来，GPS は米国の軍事用衛星測位システムであり，民間に開放された暗号化されていない C/A コードのデータを用いる場合，10m 程度の座標精度しか得られない．日本政府は自前の衛星測位の確立を目指し，GPS を補完して測位精度を高める目的で，2010 年 9 月に準天頂衛星「みちびき」を打ち上げ，システムの有効性の検証を進めている．今後，2019 年までに衛星３基を追加で打ち上げ，最終的には４機体制で運用する計画のようである．この準天頂衛星の天空上での見かけの軌道は北側がすぼんだ８の字型で，日本上空に長く留まると説明されている[1)]．しかしながら，この準天頂衛星の動きの地上からの見え方を直ちに理解できる人はおそらくいないだろう．

人工衛星の軌道については，高専3年生の物理で万有引力を取り扱う際に学習する．基本的にはケプラーの3法則で記述できるが，教科書内で扱われる題材は，もっとも単純でかつ実用性の高い静止衛星軌道に限定されている．静止衛星軌道は円軌道で赤道上空に位置し，衛星は 23 時間 56 分の周期（地球自転の角速度と同じ角速度と向き）で周回している．そのため地上から見ると空の一点に固定されたように見え，静止衛星と呼ばれる理由である．気象衛星や通信放送衛星として日常の生活に直結した重要な人工衛星である．軌道半径は地球半径の 6.6 倍と意外に遠く，力学の演習問題などで良く扱われる．

ステラナビゲータなどの天体運行シミュレータには人工衛星の軌道データも含まれており，静止衛星を表示させると，天球上で予想外に動き回っていることが分かる．また，当たり前のことではあるが，日本から観察する場合，静止衛星軌道は天の赤道より南側に5度程度ずれる．現実の静止衛星は，理想的に南天の一点に留まっているわけではなさそうである．地球自転と同じ周期と方向で周回する人工衛星（以下，準静止衛星と呼ぶことにする．静止衛星や準天頂衛星はこの準静止衛星の特殊な例である）が天空に描く見かけの軌道（軌跡）は，軌道の赤道面からの傾斜角や軌道の離心率とどのような関係にあるのであろうか．地上の観測者も地球自転とともに回転し，衛星も傾斜した楕円軌道上を回転する．赤道上から観察する場合はまだしも，高緯度から観察する場合は，軌跡の形や軌跡上の衛星の動きを直感的に把握することは極めて困難である．

本報告では，準静止衛星の天空上での見かけの軌跡をケプラーの法則を用いて算出する方法とその結果を示す．

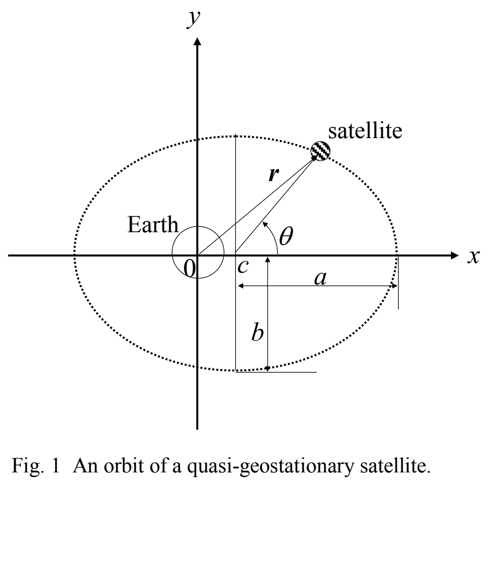


Fig. 1 An orbit of a quasi-geostationary satellite.

原稿受付　平成26年9月1日
*一般科目　satom@tsuyama-ct.ac.jp

２．ケプラーの法則による軌道計算

もちろん万有引力の法則を運動方程式に入れ，微分方程式を解くことで解析的に軌道計算することもできる．ここでは，ケプラーの３法則，すなわち第１法則：軌道は楕円で焦点の一つが地球の中心，第２法則：面積速度一定，第３法則：周回周期の２乗と半長軸の３乗の比が一定，を用い代数的に算出する．

手順は以下の通りである．

まず，図１のように z 軸を北に，x-y 平面に赤道面を置き，軌道傾斜角が 0° の楕円軌道を求める．ケプラーの第３法則から，半長軸の長さ a は静止衛星の軌道半径に等しい．半長軸を x 軸上に置き，x 座標の値が小さい側の焦点を原点に置く．すなわち地球の中心位置を原点にする．楕円の離心率は $e = c/a$ である．ここで c は楕円の中心からの焦点までの距離である．楕円の半短軸の長さ b とは，$a^2 - b^2 = c^2$ の関係があるので，$b^2 = (1 - e^2)\, a^2$ である．軌道上の点 $\boldsymbol{r}$ は媒介変数を θ として次式に表される．

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} c + a\cos\theta \\ b\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

次に，赤道面に対する軌道傾斜角を ϕ として，もう一つの焦点が北側になるよう軌道を回転させる．y 軸周りを $-\phi$ 回転となる．図２では y 軸は紙面の表から裏の方向なので時計回りとなる．したがって，傾斜した軌道上の点 $\boldsymbol{r}'$ は次式に表される．

$$\boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \boldsymbol{r} \tag{2}$$

ここまでがケプラーの第１法則の適用である．次に第２法則である面積速度一定から，

$$\frac{dS}{dt} = \left| \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}}{2} \right| = const. \tag{3}$$

となる．ここで $\boldsymbol{v}$ は衛星の速度であり，$\boldsymbol{r}$ の時間微分である．角運動量 $\boldsymbol{L}$ は，$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v}$ でなので，

$$\frac{dS}{dt} = \left| \frac{\boldsymbol{L}}{2m} \right| \tag{4}$$

面積速度は一周回の積分で楕円の面積になる．地球自転の周期をTとして，

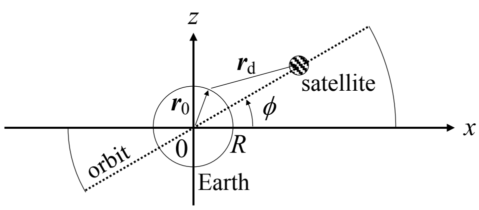


Fig. 2 Tilted orbit of a quasi-geostationary satellite.

$$\begin{aligned} \int_T dS &= \frac{1}{2} \int_T \frac{L}{m} dt \\ \pi ab &= \frac{1}{2} \frac{L}{m} T \\ L &= \frac{2\pi\, m\, ab}{T} \end{aligned} \tag{5}$$

一方，$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v}$ より，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \begin{pmatrix} c + a\cos\theta \\ b\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times m \begin{pmatrix} -a\omega\sin\theta \\ b\omega\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= m\, b\,(a + c\cos\theta)\,\omega\, \boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{6}$$

ここで ω は軌道の中心から見た角速度で，θ の時間微分である．また，$\boldsymbol{k}$ は z 方向の単位ベクトルである．式 (5) と (6) より，次の微分方程式が得られ，両辺を t で積分することで，媒介変数 θ と時刻 t の関係式が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{2\pi a}{(a + c\cos\theta)\, T} \\ t &= \frac{T}{2\pi a}(a\theta + c\sin\theta) \end{aligned} \tag{7}$$

計算手順上は媒介変数 θ を時刻 t の関数として表すことが望ましいが，単純な式にはならないので諦め，この関係式を用いて数値的に任意の時刻の θ を求めることにする．これでケプラーの第２法則を適用したことになる．

最後に，地上の観測者から見た見かけの位置 $\boldsymbol{r}_d$ を計算する．観測者の緯度を η とすると，観測者の位置 $\boldsymbol{r}_0$ は，地球半径を R として，次式で表せる．

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} R\cos\eta\cos\theta' \\ R\cos\eta\sin\theta' \\ R\sin\eta \end{pmatrix} \tag{8}$$

ここで媒介変数 θ' は，$\theta' = 2\pi t / T$ である．観測者から見た衛星の相対位置 $\boldsymbol{r}_\mathrm{d}$ は，$\boldsymbol{r}_\mathrm{d} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0$ である．観測者から見える方向は $\boldsymbol{r}_\mathrm{d}$ を z 軸周りに $-\theta'$ 回転させ，x 成分と z 成分の比，および x 成分と y 成分の比から，赤緯 α_z と時角 α_y が求まる．

$$\boldsymbol{r}'_\mathrm{d} = \begin{pmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' & 0 \\ -\sin\theta' & \cos\theta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{r}_\mathrm{d} \tag{9}$$

$$\alpha_z = \tan^{-1} \frac{(r'_\mathrm{d})_\mathrm{z}}{(r'_\mathrm{d})_\mathrm{x}} \tag{10}$$

$$\alpha_y = -\tan^{-1} \frac{(r'_\mathrm{d})_\mathrm{y}}{(r'_\mathrm{d})_\mathrm{x}} \tag{11}$$

ここで各添え字は成分を表す．

なお，赤緯，時角は観測者に固定された天の座標で，真南が時角 0°，天の赤道が赤緯 0° となる．赤緯は北方向が正，時角は西方向が正である．準静止衛星の軌跡を表す場合，この赤緯と時角を用いて表せば実際の見え方に近くなる．

数値計算する際は，軌道の半長軸の長さ a と地球半径 R の比を代入する．a は静止衛星の軌道半径に等しい．重力が向心力であることから次の関係式

$$G\frac{mM}{a^2} = ma\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \tag{12}$$

より，$a = 6.6R$ と求まる．G は万有引力定数，m は衛星の質量，M は地球の質量を表す．

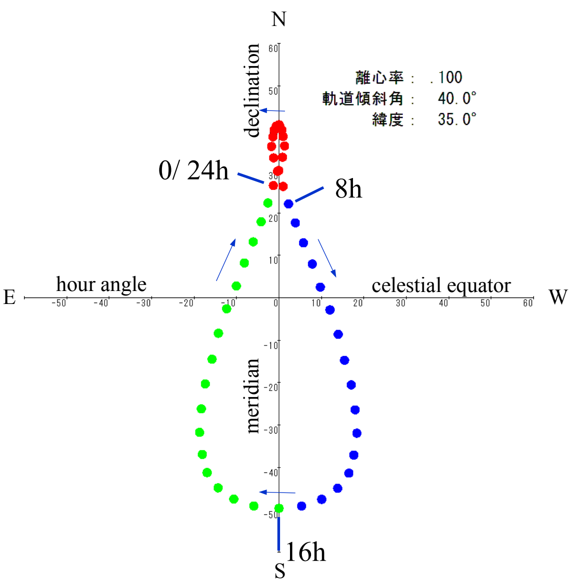


Fig. 3 Calculated trajectory of the quasi-zenith satellite ‘Michibiki’ with tilt angle of 40deg, and eccentricity of 0.1. Dots represent the

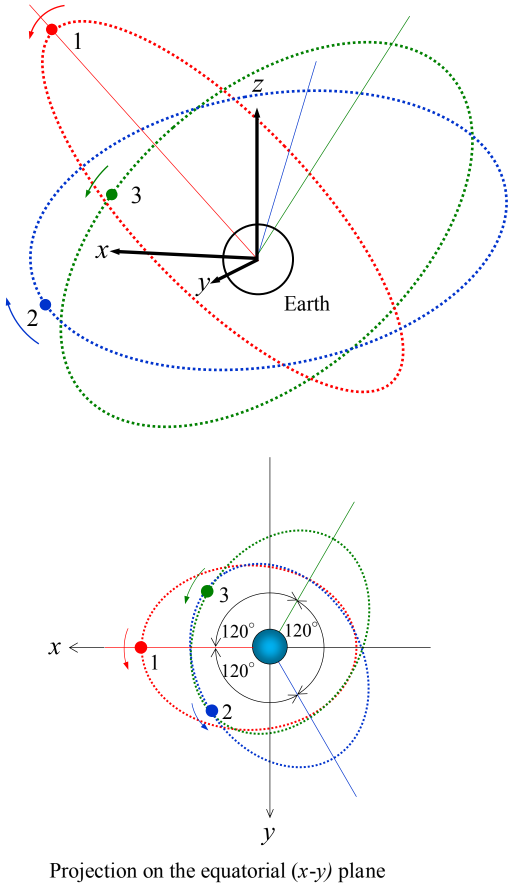


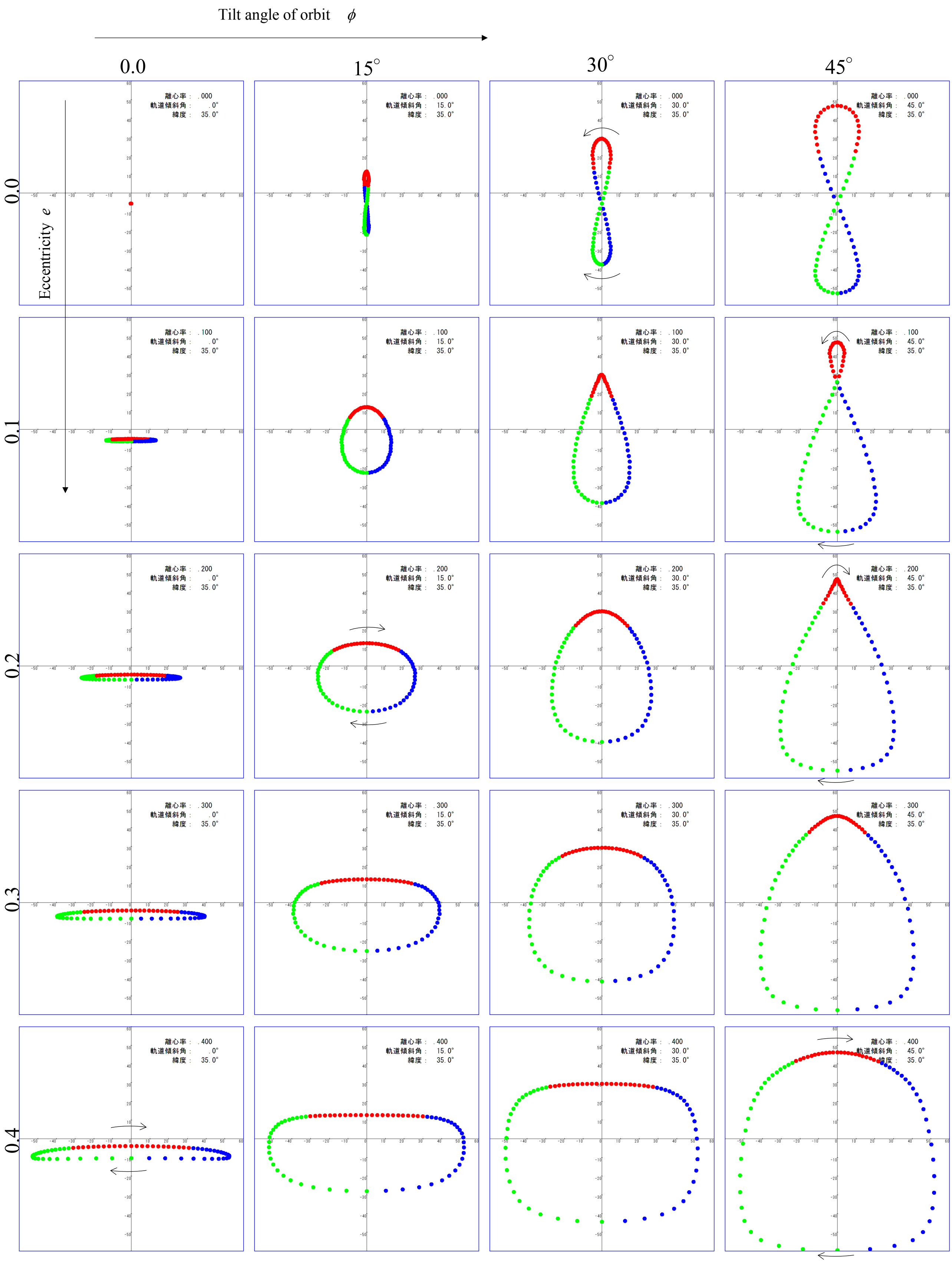
Fig. 4 Orbits of three quasi-zenith satellites. The eccentricity of orbit ellipses is exaggerated for easy understanding.

衛星が天空に描く軌跡を求めるには方位だけの情報で十分なので，具体的な計算を行う際は，$a = 1$，$b = (1-e^2)^{1/2}$，$c = e$ として簡略化した．

３．軌跡の計算結果

JAXA のサイトによると準天頂衛星「みちびき」の軌道傾斜角は 40°，離心率 0.1 である[1)]．「みちびき」の軌跡を計算した結果を図３に示す．観測者の緯度条件は 35° である．図では横軸が天の赤道，縦軸が子午線を表す．

計算で得られた軌跡を見ると北側がすぼんだ８の字型になっていることがわかる．位置算出の時間間隔は 30 分である．点が密集している北側のループではゆっくり移動して，天頂付近に長く留まっていることが分かる．詳しく見ると，周期の約 1/3 は北側のループに留まっていることがわかり，準天頂衛星の名称がついている由縁である．３基の衛星を，赤道面との昇交点を 120° づつ変えた軌道に配置すれば，常に一基は天頂付近に存在することになる．この様子を図４に示す．JAXA の計画では，最終的には４基で構成する予定のようである．その場合，



Latitude of observer is 35° N, and time interval is 20 min. Direction of position change in the sky is shown with arrows. Color of dots is altered in every 8 hours.

Fig. 5 Calculated trajectories of quasi-geostationary satellites

一基は静止軌道に置く計画のようである．なお，図４の軌道は正確ではなく３つの軌道の相対的な関係を把握するためにあえて離心率を大きく描いてある．離心率 $e = 0.1$ の軌道はほぼ真円で，赤道面への射影は地球を中心にしたときの動径方向につぶれた楕円になるのが正しい．

軌道傾斜角ϕを 0°，15°，30°，45°，離心率eを 0，0.1，0.2，0.3，0.4と変化させた場合の準静止衛星の軌跡を算出して一覧にまとめたのが図５である．計算の時間間隔は 20 分で，観察者の緯度は北緯 35° である．軌道傾斜角や離心率の条件によって天頂付近に留まる時間が変化することを分かり易く示すため，８時間おきに衛星位置を表す点の色を変えて描画してある．

軌道傾斜角が 0°，離心率が 0 は，静止衛星に対応するので，軌跡は南天の一点に静止する．計算結果は時角 0°，赤緯 -5° の点であり，本計算の妥当性が確認される．

軌道傾斜角が 0° では軌道は赤道面に存在するので，軌跡を赤道上から観察すると天の赤道上を東西方向に往復するように見える．高緯度側から見ると離心率が増すにしたがい遠地点と近地点までの距離の差が大きくなるので遠地点側は北へ，近地点側は南へずれ，南北につぶれた輪を描く．遠地点側は速度が低下するので，滞留時間が長く，近地点側では速度が増す．そのため南側は西から東，北側は東から西へと時計回りに軌跡を描く．

赤道上から観察する場合でも，軌道が赤道面から傾斜すると，赤緯方向に往復する動きが重なる．離心率が 0 でも，軌道が傾斜していると，赤緯の絶対値に対応して相対角速度が変わるため軌跡は赤緯方向にも動きがみられ，軌跡は８の字を描く．軌道が赤道面を通過する際には斜めに横切るため，地球の自転に対する相対角速度は負になる．したがって赤道面を通過する際の軌跡は東から西の方向になる．８の字の北側のループは反時計回り，南側のループは時計回りとなる．

離心率が増すにしたがい，南北での軌跡の対称性が崩れ，北側にもう一つの焦点がある場合，北側のループが縮小する．離心率が 0.2 以上では北側のループは失われ，涙型に変形し，さらにおむすび型に変わる．

なお，本報告における計算は，描画も含めすべて十進BASIC [2] を用いて行った．

４．まとめ

高専３年生で学ぶケプラーの法則をもとに，地上から観察する際の準静止衛星（周回周期が地球自転周期に一致する衛星）が天空に描く軌跡を計算する方法を示した．

衛星と観察者がともに回転しているため天空に観測される軌跡を直感的に把握することは困難である．軌道傾斜角，離心率をパラメータに系統的に軌跡を求め一覧にすることで，見通し良く，衛星の軌跡の特性を把握することが可能になった．

参　考　文　献

１）JAXA「みちびき」Webページ：http://qz-vision.jaxa.jp/
２）「十進BASIC」Webページ：http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/