ラプラス変換における初期値問題

近藤只雄
金子一宗
池上哲男

あらまし

ラプラス変換によって，微分方程式を解く場合には，時間を t であらわすとき，$t=+0$ の初期値をとる必要がある。$t=-0$ の初期値と $t=+0$ の初期値が，不連続であるにもかかわらず，$t=-0$ の初期値を用いて解ける場合について述べる。

1. はしがき

先ず，$t=-0$における初期値とは，これを電気回路についていうと，過渡現象において，たとえば，スイッチを投入する前の初期値であるとする。これに反して，$t=+0$における初期値とは，スイッチ投入直後のものであるとする。もとよりわれわれが直接予見できる初期値は，$t=-0$のものであり $t=+0$ のそれは，鎖交磁束数不変則とか電荷保存則とかにより導出しなくてはならない。ところがこれは必ずしも容易でない場合があり，これがラプラス変換で微分方程式を解く際の欠点ともいうことが出来る。此の難点を除く方法として，$t=-0$の時の初期値を用いるすぐれた方法が，「拡張された演算子法」[3] および「記号的演算子法」[3] であって各方面でその偉力を発揮していることは周知のとおりである。筆者等は，ある種の極限移行の場合に，$t=-0$の時の初期値を用いたラプラス変換そのものが正解を与える場合について述べる。

なお，初期値を$t=-0$の時と $t=+0$ の時とにわけ，前者を第一種初期値，後者を第二種初期値と呼んで，区別する事[3] は，この種問題の解決に，きわめて有力であるので，ここでもその呼びかたを採用させていただく。この定義によると，ある種の電気回路で，極限移行を含む場合には，第一種初期値を用いたラプラス変換によって，微分方程式を解き得るということである。ちなみにラプラス変換は第一種初期値が零でない場合に，第二種初期値を用いて微分方程式を解くものであり，第一種初期値が零の場合には，Heaviside の演算子法により，第二種初期値を用いることなく，第一種初期値のみによって，微分方程式を解き得ることも明らかにされている[3]。

2.1 例1

電流を i とすれば，図1の回路で次式が成立する。

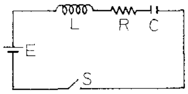

図1

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{q}{C}=E \cdots\cdots(1)$$

今 $t=-0$ の時の図1の回路の電流及コンデンサ C の電荷を夫々 $i(-0)$, $q(-0)$ であらわし，

$$i(-0)=0 \cdots\cdots(2)$$

$$q(-0)=0 \cdots\cdots(3)$$

なる初期条件のもとで (1) をラプラス変換すると，

$$\left(LS+R+\frac{1}{CS}\right)I=\frac{E}{S} \cdots\cdots(4)$$

ただし，S はラプラス変換の記号である。

$$I=\frac{E}{L\left(S^2+\frac{R}{L}S+\frac{1}{LC}\right)}=\frac{E}{L[(S+\alpha)^2+\beta^2]} \cdots(5)$$

ここで

$$\alpha=\frac{R}{2L} \qquad \beta^2=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}$$

(Ⅰ) $\beta^2>0$ ならば

$$i(t)=\frac{E}{L\beta}\varepsilon^{-\alpha t}\sin\beta t \cdots\cdots(6)$$

(Ⅱ) $\beta^2=0$ ならば

$$i(t)=\frac{E}{L}t\,\varepsilon^{-\alpha t} \cdots\cdots(7)$$

(Ⅲ) $\beta^2<0$ ならば

$$i(t)=\frac{E}{Lk}\varepsilon^{-\alpha t}\sin h\,kt \cdots\cdots(8)$$

ただし $k^2=-\beta^2=\dfrac{R^2}{4L^2}-\dfrac{1}{LC}$

今図1において $L\to0$ とした場合を考える。実在の場合には，特にコイルを回路に挿入しなくても，小さいながらに自己誘導はあるものである。故に図1において $L\to0$をより正確に $L\to+0$とす

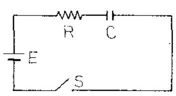

図2

る。この時図1は図2となる。又この場合 $\beta^2<0$ であから (8) 式が成立する。(8) 式で $L\to+0$ の極限を考えると，

$$\frac{E\sin h\,kt}{Lk\varepsilon^{\alpha t}}\to E\cdot\frac{\frac{1}{2}\varepsilon^{kt}}{L\cdot\frac{R}{2L}\cdot\varepsilon^{\frac{R}{2L}t}}$$

$$=\frac{E}{R}\,\frac{\varepsilon^{\frac{R}{2L}\sqrt{1-\frac{4L}{CR^2}}}}{\varepsilon^{\frac{R}{2L}t}}\to\frac{E}{R}\,\frac{\varepsilon^{\frac{Rt}{2L}\left(1-\frac{2L}{CR^2}\right)}}{\varepsilon^{\frac{R}{2L}t}}$$

$$=\frac{E}{R}\varepsilon^{-\frac{1}{CR}t}$$

即ち　$i(t)\to\dfrac{E}{R}\varepsilon^{-\frac{1}{CR}t}$ ……………………………(9)

(9) はあきらかに図2の回路の電流を与える。(9) で $t=+0$ とすると

$$i(+0)=\frac{E}{R}\cdots\cdots(10)$$

なる初期条件が得られる，普通図2の回路をラプラス変換によりて解く場合は，(10) の第二種初期値を何等かの方法によりて求める必要がある。これを若し，図2の場合に，余分の L を追加して図1とし，図1について第一種初期値を用いたラプラス変換によって解を求め，その解において，極限移行，此の場合には $L\to+0$ を行えば，正解を得るということになる。勿論この時に，(6) (7) (8) 何れの場合にも $t\to+0$ とすると，$i=(+0)\to0$ であり，(10) の如く $i(+0)=\dfrac{E}{R}$ とはならない。更にいえば，(10) は (2) なる条件を満足しない。これは $L\to+0$ とした結果である。

2.2 例2　此の場合の微分方程式は

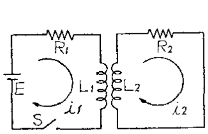

図3

$$L_1\frac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\frac{di_2}{dt}=E\cdots(11)$$

$$L_2\frac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\frac{di_1}{dt}=0\cdots(12)$$

これを

$$i_1(-0)=0\cdots\cdots(13)$$

$$i_2(-0)=0\cdots\cdots(14)$$

の条件のもとに解く。(13) (14) は第一種初期値についての条件であり，第二種初期値については，別に考慮する必要がある。

ラプラス変換を適用して，(11)(12) を解くには $i_1(+0)$，$i_2(+0)$ なる第二種初期値を算定する必要があるのであるが，ここで第一種初期値をそのまま用いるものとし，

$$i_1(-0)=i_1(+0)=0\cdots\cdots(15)$$

$$i_2(-0)=i_2(+0)=0\cdots\cdots(16)$$

を採用してみる。勿論 (15) (16) は正しいという何等の保証はない。否，誤っていることが後から判るのである。それにもかかわらず正解が出るのである。(15) (16) を用いてラプラス変換により $i_1(t)$, $i_2(t)$ を求めると，

$$i_1(t)=\frac{E}{R_1}\left\{1-\varepsilon^{-\alpha t}\cos h\,\beta t+\frac{L_2R_1-L_1R_2}{2(L_1L_2-M^2)}\frac{1}{\beta}\varepsilon^{-\alpha t}\sin h\,\beta t\right\}\cdots\cdots(17)$$

$$i_2(t)=-\frac{-E}{L_1L_2-M^2}\frac{M}{\beta}\varepsilon^{-\alpha t}\sin h\,\beta t\cdots\cdots(18)$$

$$\alpha\equiv\frac{L_1R_2+L_2R_1}{2(L_1L_2-M^2)}\quad\beta^2\equiv\frac{(L_1R_2-L_2R_1)^2+4R_1R_2M^2}{4(L_1L_2-M^2)^2}\cdots\cdots(19)$$

今 $L_1L_2-M^2\to+0$ なる極限移行を考える。

$L_1L_2-M^2=+0$ は電気的には理想変圧器の場合である。此の時 (19) から，

$\alpha\to+\infty\quad\beta^2\to+\infty$

となり，

$$i_1(t)=\frac{E}{R_1}\left(1-\frac{L_1R_2}{L_1R_2+L_2R_1}\varepsilon^{-\frac{R_1R_2}{L_1R_2+L_2R_1}t}\right)\cdots\cdots(20)$$

$$i_2(t)=\frac{-E\sqrt{L_1L_2}}{L_1R_2+L_2R_1}\varepsilon^{-\frac{R_1R_2}{L_1R_2+L_2R_1}t}\cdots\cdots(21)$$

が得られる。これが正しいものである事は付録1に示してある。

(20)，(21) で $t=+0$ としても最早 (15) (16) なる初期条件を満足しない。

即ち $t\to+0$ の時，

$$i_1(+0)=\frac{L_2E}{(L_1R_2+L_2R_1)}\not\fallingdotseq0\cdots\cdots(22)$$

$$i_2(+0)=\frac{-E\sqrt{L_1L_2}}{L_1R_2+L_2R_1}\not\fallingdotseq0\cdots\cdots(23)$$

(22) (23) が比の場合の正しい第二種初期値であることは付録2のようにして証明出来る。何れにしても，此の場合，第一種初期値を用いて，第二種初期値には無関係に，ラプラス変換によりて正解が得られることを示している。勿論 (22) (23) なる第二種初期値を用いて，$L_1L_2-M^2=+0$ の時に，ラプラス変換によって (11) (12) を解けば，(20) (21) が得られる(1)。

此の場合 (22) (23) なる初期条件を求めることが難点である。

3. む　す　び

以上2例をあげて，第一種初期値をそのまま用いて，第

二種初期値とは無関係に，ラプラス変換によりて，正解に達する場合を述べた。何れの場合も，極限移行を伴って居り，その限りにおいて，第二種初期値を用いた普通の方法と比べて，必ずしも簡単と云うことは出来ない。ただ，第二種初期値を求める事が困難の場合には，此のような方法も再考の余地があるのではなかろうか。此の場合，なるべく，電気的に，第一種初期値が，零となるような状態からの極限移行を考える方が，簡単さの点から望ましい。

謝辞　終りに，本文は，主として本校々長，山下敬治先生の末発表のノート[(1)(2)]により，学生の卒研指導中に生じたテーマに基づくものであり，同ノート中の諸結果を使用することを許された山下先生に深く感謝する。

文　　　献

（1）山下敬治　Laplace 変換（昭和 42 年）
（2）山下敬治　電気回路における初期値について（昭和 43 年）
（3）林　重憲　電気評論（昭和 15～16 年）

付録 1

初期条件 $t=0$ のとき $i_1=0,\ i_2=0$

密結合の条件 $L_1L_2-M^2 \fallingdotseq 0,\ L_1L_2-M^2>0$

この条件のもとに，次の微分方程式を，Heaviside の演算子法で解く

$$L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}+R_1i_1=E \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$L_2\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_1}{dt}+R_2i_2=0 \cdots\cdots\cdots(2)$$

両式を Heaviside の演算子 P で表わすと次の通りである。

$$(L_1P+R_1)i_1+MPi_2=E$$

$$MPi_1+(L_2P+R_2)i_2=0$$

これを i_1, i_2 で解いて

$$i_1=\frac{E(L_2P+R_2)}{(L_1L_2-M^2)P^2+(L_1R_2+L_2R_1)P+R_1R_2}$$

$$i_2=\frac{-EMP}{(L_1L_2-M^2)P^2+(L_1R_2+L_2R_1)P+R_1R_2}$$

を得る。

ここで，

$$\alpha=\frac{L_1R_2+L_2R_1}{2(L_1L_2-M^2)},\quad \beta=\frac{(L_1R_2-L_2R_1)^2+4R_1R_2M^2}{4(L_1L_2-M^2)}$$

とおくと

$$i_1=\frac{E(L_2P+R_2)}{(L_1L_2-M^2)(P+\alpha-\beta)(P+\alpha+\beta)}$$

$$i_2=\frac{-EMP}{(L_1L_2-M^2)(P+\alpha-\beta)(P+\alpha+\beta)}$$

となる。

これより

$$i_1=\frac{EL_2}{L_1L_2-M^2}\frac{1}{P+\alpha+\beta}+\frac{E\{R_2-L_2(\alpha-\beta)\}}{(L_1L_2-M^2)2\beta}\left(\frac{1}{P+\alpha-\beta}-\frac{1}{P+\alpha+\beta}\right)$$

$$i_2=\frac{-EM}{L_1L_2-M^2}\left\{\frac{1}{P+\alpha+\beta}-\frac{\alpha-\beta}{2\beta}\left(\frac{1}{P+\alpha-\beta}-\frac{1}{P+\alpha+\beta}\right)\right\}$$

又 $\dfrac{1}{P+\alpha+\beta}=\dfrac{1}{\alpha+\beta}-\dfrac{1}{\alpha+\beta}\varepsilon^{-(\alpha+\beta)t}$

$\dfrac{1}{P+\alpha-\beta}=\dfrac{1}{\alpha-\beta}-\dfrac{1}{\alpha-\beta}\varepsilon^{-(\alpha-\beta)t}$ であるから

$$\frac{1}{P+\alpha-\beta}-\frac{1}{P+\alpha+\beta}$$
$$=\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{1}{\alpha+\beta}\varepsilon^{-(\alpha+\beta)t}-\frac{1}{\alpha-\beta}\varepsilon^{-(\alpha-\beta)t}$$
$$=\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{\alpha\varepsilon^{-\alpha t}}{\alpha^2-\beta^2}(\varepsilon^{-\beta t}-\varepsilon^{\beta t})-\frac{\beta\varepsilon^{-\alpha t}}{\alpha^2-\beta^2}(\varepsilon^{\beta t}+\varepsilon^{-\beta t})$$
$$=\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{2\alpha\varepsilon^{-\alpha t}}{\alpha^2-\beta^2}\sin h\beta t-\frac{2\beta\varepsilon^{-\alpha t}}{\alpha^2-\beta^2}\cos h\beta t$$

である。

又，$\varepsilon^{-(\alpha+\beta t)}=\varepsilon^{-\alpha t}(\cos h\beta t-\sin h\beta t)$

よって

$$i_1=\frac{EL_2}{L_1L_2-M^2}\cdot\frac{1}{\alpha+\beta}-\frac{EL_2}{L_1L_2-M^2}\cdot\frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{\alpha+\beta}(\cos h\beta t-\sin h\beta t)+\frac{E\{R_2-L_2(\alpha-\beta)\}}{2\beta(L_1L_2-M^2)}\left(\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{2\alpha\varepsilon^{-\alpha t}}{\alpha^2-\beta^2}\sin h\beta t-\frac{2\beta\varepsilon^{-\alpha t}}{\alpha^2-\beta^2}\cos h\beta t\right)$$
$$=\frac{E}{L_1L_2-M^2}\left\{\frac{L_2}{\alpha+\beta}+\frac{R_2-L_2(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\beta^2}\right\}-\frac{ER_2}{L_1L_2-M^2}\cdot\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\varepsilon^{-\alpha t}\cos h\beta t+\frac{E}{L_1L_2-M^2}\cdot\frac{-R_2\alpha+L_2(\alpha^2-\beta^2)}{\beta(\alpha^2-\beta^2)}\varepsilon^{-\alpha t}\sin h\beta t$$
$$=\frac{ER_2}{L_1L_2-M^2}\cdot\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{ER_2}{L_1L_2-M^2}\cdot\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\varepsilon^{-\alpha t}\cos h\beta t+\frac{E}{L_1L_2-M^2}\cdot\frac{-R_2\alpha+L_2(\alpha^2-\beta^2)}{\beta(\alpha^2-\beta^2)}\varepsilon^{-\alpha t}\sin h\beta t$$

$$i_2=\frac{-EM}{L_1L_2-M^2}\left\{\frac{1}{\alpha+\beta}-\frac{1}{\alpha+\beta}\varepsilon^{-\alpha t}(\cos h\beta t-\sin h\beta t)-\frac{\alpha-\beta}{2\beta}\left(\frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{2\alpha\varepsilon^{-\alpha t}}{\alpha^2-\beta^2}\sin h\beta t-\frac{2\beta\varepsilon^{-\alpha t}}{\alpha^2-\beta^2}\cos h\beta t\right)\right\}=\frac{-EM}{L_1L_2-M^2}\cdot\frac{1}{\beta}\varepsilon^{-\alpha t}\sin h\beta t$$

$\alpha^2-\beta^2=\dfrac{R_1R_2}{L_1L_2-M^2}$ であるから

$$i_1=\frac{E}{R_1}-\frac{E}{R_1}\varepsilon^{-\alpha t}\cos h\beta t+\frac{E(L_2R_1-L_2R_2)}{2(L_1L_2-M^2)R_1}\frac{1}{\beta}\varepsilon^{-\alpha t}\sin h\beta t$$

$$=\frac{E}{R_1}(1-\varepsilon^{-\alpha t}\cos h\beta t+\frac{L_2R_1-L_1R_2}{2(L_1L_2-M^2)}\cdot\frac{1}{\beta}\varepsilon^{-\alpha t}\sin h\beta t$$

$$i_2=-\frac{E}{L_1L_2-M^2}\cdot\frac{M}{\beta}\varepsilon^{-\alpha t}\sin h\beta t$$

となる。即ち 2.2 の (17) (18) が得られた。

付 録 2

先ず 2.2 の (22) (23) 式から

$$L_1i_1(+0)+L_2i_2(+0)=0\cdots\cdots(1)$$

を示すことが出来る。

$$L_1i_1(-0)+L_2i_2(-0)=0\cdots\cdots(2)$$

であることは $i_1(-0)=0$, $i_2(-0)=0$ から，あきらかであるので，(1) は鎖交磁束数不変則を示している。

図1で，

$$(R_1+j\omega L_1)I_1+j\omega MI_2=E\cdots\cdots(3)$$

$$j\omega MI_1+(R_2+j\omega L_2)I_2=0\cdots\cdots(4)$$

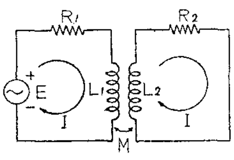

図1

(3) (4) は次の如く書き得る。

$$Z_{11}I_1+Z_{12}I_2=E\cdots\cdots(5)$$

$$Z_{21}I_1+Z_{22}I_2=0\cdots\cdots(6)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}Z_{11}&=R_1+j\omega L_1=Z_1\\Z_{12}&=Z_{21}=j\omega M\\Z_{22}&=R_2+j\omega L_2=Z_2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7)$$

(5), (6) より

$$I_1=\frac{\begin{vmatrix}E & j\omega M\\0 & Z_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}Z_1 & j\omega M\\j\omega M & Z_2\end{vmatrix}}=\frac{Z_2E}{Z_1Z_2+\omega^2M^2}\cdots\cdots(8)$$

(8) より

$L_1L_2-M^2=+0$ の時には，入力インピーダンス Z_{in} は，

$$Z_{in}=\frac{E}{I_1}=\frac{Z_1Z_2+M^2\omega^2}{Z_2}\cdots\cdots(9)$$

(9) に (7) を代入する。

$$Z_{in}=\frac{E}{I_1}=\frac{(R_1+j\omega L_1)(R_2+j\omega L_2)+M^2\omega^2}{R_2+j\omega L_2}$$

$$=\frac{R_1R_2+j\omega(L_1R_2+R_1L_2)-\omega^2L_1L_2+M^2\omega^2}{R_2+j\omega L_2}$$

$$\simeq\frac{j\omega(L_1R_2+R_1L_2)}{j\omega L_2}=\frac{L_2R_1+L_1R_2}{L_2}\cdots\cdots(10)$$

今 $Z=R_2$ とすると (10) より，

$$i(+0)=\frac{E}{Z_{in}}=\frac{EL_2}{L_2R_1+L_1R_2}\cdots\cdots(11)$$

(11) は 2.2 の (22) と一致する。

以上は正弦波の場合であるが，インピーダンス関数を考えれば，そのままで一般波形の場合に適合し得る。

何れの場合にも，(11) を導くのに，相当の条件が必要であり，2.2の (20) (21) より $t=+0$ として導く方法に比して，一般性を欠くように思われる。