

# n 次インパルス関数の一応用

近藤 只雄, 金子 一宗, 中西宣一郎

## あ ら ま し

Dirac の  $\delta$  関数の一次微分として二次インパルス関数, 二次微分としての三次インパルス関数までは, その物理的意味も明らかであるが, それ以上となると数学的色彩が強くなる。n 次インパルス関数の一性質とそれを電気回路に利用した場合について述べる。

## 1 は じ め に

次の関係式を証明する

$$a\delta(t) - a^2\delta'(t) + a^3\delta''(t) - \dots = \varepsilon^{-\frac{t}{a}} \quad (1)$$

ただし  $\delta(t)$  は Dirac の  $\delta$  関数  $\delta'(t)$ ,  $\delta''(t)$ , ..... はそれぞれその一次微分, 二次微分, ..... とし  $\varepsilon$  は自然対数の底とする。

ラプラス変換によると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{a\delta(t) - a^2\delta'(t) + a^3\delta''(t) - \dots\} \\ = a - a^2s + a^3s^2 - \dots \\ = a(1 - as + a^2s^2 - \dots) \\ = a \frac{1}{1 + as} = \frac{1}{s + \frac{1}{a}} \end{aligned}$$

逆ラプラス変換をとると

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{a}}\right\} = \varepsilon^{-\frac{t}{a}}$$

したがって

$$a\delta(t) - a^2\delta'(t) + a^3\delta''(t) - \dots = \varepsilon^{-\frac{t}{a}}$$

## 2. 応 用

(1) 式の応用について述べる

$L, R$  回路において

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad (2)$$

(2) をヘビサイドの演算子法で解くと

$$i = \frac{E}{LP + R} \quad (3)$$

ただし  $P = \frac{d}{dt}$  又 1 はヘビサイドの単位関数

(3) 式の変形は一般に

$$i = \frac{E}{LP + R} \quad 1$$

$$= \frac{E}{LP} \left(1 + \frac{R}{LP}\right)^{-1} \quad 1 \quad (4)$$

$$= \frac{E}{LP} \left(1 - \frac{R}{LP} + \frac{R^2}{L^2P^2} - \frac{R^3}{L^3P^3} + \dots\right) \quad 1$$

$$= \frac{E}{R} \left(\frac{R}{L} \frac{1}{P} - \frac{R^2}{L^2} \frac{1}{P^2} + \frac{R^3}{L^3} \frac{1}{P^3} - \dots\right) \quad 1$$

$$= \frac{E}{R} \left(\frac{R}{L} t - \frac{R^2}{2!L^2} t^2 + \frac{R^3}{3!L^3} t^3 - \dots\right) \quad 1$$

$$= \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad 1 \quad (5)$$

即ち  $\frac{1}{P}$  のべき級数に展開するのが普通である。

ところが  $\frac{E}{LP + R} \quad 1$  は

$$\begin{aligned} i &= \frac{E}{LP + R} \quad 1 \\ &= \frac{\frac{E}{R}}{\frac{L}{R}P + 1} \quad 1 \\ &= \frac{E}{R} \left(1 + \frac{L}{R}P\right)^{-1} \quad 1 \\ &= \frac{E}{R} \left(1 - \frac{L}{R}P + \frac{L^2}{R^2}P^2 - \frac{L^3}{R^3}P^3 + \dots\right) \quad 1 \quad (6) \end{aligned}$$

の如くにも展開出来る。従来は(4)の方法に展開して(6)の方法は故意に避けた\*。

こゝで  $\delta$  関数を使用することになると

$$\begin{aligned} P1 &= \delta(t) \\ P^21 &= \delta'(t) \\ &\vdots \\ P^n1 &= \delta^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{L}{R}P + \frac{L^2}{R^2}P^2 - \frac{L^3}{R^3}P^3 + \dots\right) \quad 1 \\ &= 1 - \frac{L}{R}\delta(t) + \frac{L^2}{R^2}\delta'(t) - \frac{L^3}{R^3}\delta''(t) + \dots \\ &= 1 - \left\{\frac{L}{R}\delta(t) - \frac{L^2}{R^2}\delta'(t) + \frac{L^3}{R^3}\delta''(t) - \dots\right\} \quad (7) \end{aligned}$$

(7) 式に(1)式を用いると

$$\left\{\frac{L}{R}\delta(t) - \frac{L^2}{R^2}\delta'(t) + \frac{L^3}{R^3}\delta''(t) - \dots\right\} = \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}$$

であるから

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{L}{R}P + \frac{L^2}{R^2}P^2 - \frac{L^3}{R^3}P^3 + \dots\right) \quad 1 \\ &= (1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}) \end{aligned}$$

よって

$$i = \frac{E}{R} \left( 1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L} t} \right) \quad (8)$$

(8)は(5)に一致する。

### 3. お わ り に

$i$  の式を(4)の形に展開するか(6)の形に展開するかは  $\delta^{(n)}$

( $t$ ) を用いることにより全く自由になる。この場合(1)式の証明を超関数により証明することが必要となろうがこの点について本校池上講師より貴重な助言を得たことに深謝します。

### 参 考 文 献

電気学会 過渡現象論 P-189 (昭39)