NDC 501.9

多出力をもつある双線形システムに対するオブザーバ

下　西　二　郎*　西　山　宗　弘*　富　田　信　昭*

(昭 和 53 年 4 月 28 日 受 理)

An Observer for a class of Bilinear Systems with Multi-Output Signal

Jiro SHIMONISHI · Munehiro NISHIYAMA · Nobuaki TOMITA

(Received April 28, 1978)

This paper presents a method to construct an observer for the bilinear systems with m-output signal, described by S_1; $x(k+1)=u_p(k)\mathbf{A}x(k)+\mathbf{B}u(k)$, $y(k)=\mathbf{C}x(k)$ where $x(k)\in R^n$, $u(k)\triangleq(u_1(k),\ \cdots\cdots,\ u_p(k),\ \cdots\cdots u_r(k))^T\in R^r$, $y\in R^m$. And it is assumed here that S_1 is observable and matrix $\mathbf{A}$ is non-singuler. The observer of S_1 proposed here is S_0 ; $\mathbf{z}(k+1)=u_p(k)\,\mathbf{UAJz}(k)+\mathbf{UAGy}(k)u_p(k)+\mathbf{UB}u(k)$, $\bar{x}(k)=\mathbf{Jz}(k)+\mathbf{Gy}(k)$, where $\mathbf{z}(k)\in R^l$ and $\bar{x}(k)$ is the estimated value of $x(k)$. It is shown that i). the dimension of S_0 is minimal if $l=n-m$, ii) an example of the solutions such that S_0 is the minimal order observer of S_1 is given by a g-inverse of $\mathbf{C}$, and iii) then $x(k)$ and $\bar{x}(k)$ become identical by the adjustment of β-1 steps, where β is observability index of S_1.

1. ま え が き

本稿ではあるクラスの離散時間型双線形システムに対するオブザーバの設計法について述べている。双線形システムに対するオブザーバに関しては連続時間型を対象とした研究がいくつか報告されている。[1)~3)] このうち，井上および古荘は被対象システムをそれぞれ非線形システム，時変システムと見なしてそれらに対してのオブザーバを提案しているが，いずれの場合もその収束性が入力に依存し，入力と独立にはオブザーバは設計できない。一方，原と古田はオブザーバの標準形として線形システムと類似の形を与えており，その収束性は入力に依存せず入力とは独立に設計ができるという特長を持つ。しかし，この標準形では構成できない双線形システムが実在する。[4)] 本稿ではこのようなクラスの双線形システムを対象とした離散時間型のオブザーバの設計法を与えている。本方法によると入力とは独立にオブザーバを設計することが可能であり，このクラスの双線形システムに適合した有効なものと考えられる。

なお，単出力システムについては既に報告した[5)]のでここでは多出力システムについて報告する。

*電気工学科

2. 被対象システムの数学モデル

本稿ではつぎに記述される双線形システムを考察対象とする。

$$S_1:\left.\begin{aligned} x(k+1)&=u_p(k)\mathbf{A}x(k)+\mathbf{B}u(k)\\ y(k)&=\mathbf{C}x(k)\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

ここで，$u(k)=(u_1(k),\ u_2(k),\ \cdots,\ u_p(k),\ \cdots,\ u_r(k))^T\in R^r$, $y\in R^m$, $x(k)\in R^n$であり，$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ は適当なサイズを持つ実行列とする。また，$\mathbf{A}$ は正則とし，$\mathbf{C}$ は最大階数をもつものと仮定する。さらに，入力 $u(k)$ は任意の時刻 k において有界とする。ここで，$(\cdot)^T$ は・の転置トマリクスを示している。

シスラムS_1は生物プロセスなどに見られる数学モデルの一形態[4)]である。

まず，システム S_1 に関するいくつかの性質を上げておこう。

＜定義1＞　有限時間内の入出力の観測値からシステムS_1の初期状態 $x(0)$ が一意に決定できるならばシステムS_1は可観測であるという。

〔命題1〕　マトリクス $\mathbf{R}_k$ を以下のように定義する。

$$\mathbf{R}_k\triangleq[\mathbf{C}^T,\ \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T,\cdots,(\mathbf{A}^T)^{k-1}\mathbf{C}^T]^T\qquad(2)$$

また，βを(3)式が成り立つ最小の自然数とする。

$$rank\,\mathbf{R}_\beta = rank\,\mathbf{R}_{\beta+1} \tag{3}$$

このとき，システム S_1 が可観測であれば，

$$rank\,\mathbf{R}_\beta = n \tag{4}$$

が成り立つ。

（証明） (1)式よりシステムS_1の出力 $\boldsymbol{y}(k); k=0,\ 1,\ \cdots, n-1$ は入力 $\boldsymbol{u}(k); k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-2$ を用いて次式で与えられることがわかる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(0) &= \mathbf{C}\boldsymbol{x}(0)\\
\boldsymbol{y}(1) &= u_p(0)\mathbf{CA}\boldsymbol{x}(0)+\mathbf{CA}\boldsymbol{u}(0)\\
\boldsymbol{y}(2) &= u_p(0)\cdot u_p(1)\mathbf{CA}^2\boldsymbol{x}(0)+u_p(1)\mathbf{CAB}\boldsymbol{u}(0)\\
&\quad +\mathbf{CB}\boldsymbol{u}(1)\\
&\ \vdots\\
\boldsymbol{y}(n-1) &= u_p(0)\cdot u_p(1)\cdots u_p(n-2)\mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{x}(0)+u_p(1)\cdot\\
&\quad u_p(2)\cdots u_p(n-2)\mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B}\boldsymbol{u}(0)+u_p(2)\cdot\\
&\quad u_p(3)\cdots u_p(n-2)\mathbf{CA}^{n-3}\mathbf{B}\boldsymbol{u}(1)+\cdots+\\
&\quad n_p(n-2)\mathbf{CAB}\boldsymbol{u}(n-3)+\mathbf{CB}\boldsymbol{u}(n-2)
\end{aligned} \tag{5}$$

ここで以下のマトリクスを定義する。

$$\mathbf{Y}\triangleq(\boldsymbol{y}^T(0),\ \boldsymbol{y}^T(1),\cdots,\boldsymbol{y}^T(n-1))^T\in\mathbf{R}^{n-m} \tag{6}$$

$$\mathbf{I}^{(l)}_m\triangleq[\mathbf{O}_{m,m}\vdots\mathbf{O}_{m,m}\vdots\cdots\vdots\overset{l}{\mathbf{I}_m}\vdots\mathbf{O}_{m,m}\vdots\cdots\vdots\mathbf{O}_{m,m}]\in\mathbf{R}^{n\cdot m\times m} \tag{7}$$

；第lブロックがm次単位マトリクスである$n\cdot m$マトリクス。ただし，$\mathbf{O}_{t,t}$は$(t\times t)$の零マトリクスである。

$$\mathbf{M}_l\triangleq[\mathbf{O}_{n\cdot m,m}\vdots\cdots\vdots\overset{l}{\mathbf{U}_p{}^l}(l)\vdots\mathbf{U}_p{}^{l+1}(l+1)\vdots\cdots\vdots\mathbf{U}_p{}^n(n)] \tag{8}$$

$\in\mathbf{R}^{n\cdot m\times n\cdot m}$：第$l-1$ブロックまでが零マトリクスである$(n\cdot m\times n\cdot m)$マトリクス。ただし，

$$\mathbf{U}_p{}^l(l)\triangleq\mathbf{I}_m{}^{(l)},\quad \mathbf{U}_p{}^{l+j}(l+j)\triangleq\prod_{i=l-1}^{l+j-2}u_p(i)\mathbf{I}_m{}^{l+j}$$

$;j=1,2,\cdots,n-l$ である。

$$\mathbf{N}_l\triangleq[\mathbf{O}_{r,m}\vdots\cdots\vdots\overset{l+2}{\mathbf{P}_0{}^T}\vdots\mathbf{P}_1{}^T\vdots\cdots\vdots\mathbf{P}^T{}_{n-l-2}]^T\in\mathbf{R}^{n\cdot m\times r} \tag{9}$$

；$l+1$ブロックまでが零マトリクスである$(n\cdot m\times r)$マトリクス。ただし，

$\mathbf{P}_i\triangleq\mathbf{CA}^i\mathbf{B}; i=0,1,\cdots,n-l-2$ である。

これらのマトリクスを用いれば(5)式のマトリクス表現として次式を得る。

$$\mathbf{Y}=\mathbf{M}_1\mathbf{R}_n\boldsymbol{x}(0)+\mathbf{M}_2\mathbf{N}_0\boldsymbol{u}(0)+\cdots\cdots+\mathbf{M}_n\mathbf{N}_{n-2}\boldsymbol{u}(n-2) \tag{10}$$

(10)式において第2項以下は既知である。したがって，$\boldsymbol{x}(0)$の一意解を得るためには$\mathbf{R}_n$は最大階数を持つことが必要である。すなわち，

$$rank\,\mathbf{R}_n=n \tag{11}$$

ところが，$\mathbf{CA}_k$ が $\mathbf{C},\ \mathbf{CA},\cdots\cdots,\ \mathbf{CA}^{k-1}$ の一次結合であれば $\mathbf{CA}j\,(i\geq k)$ もまた $\mathbf{C},\ \mathbf{CA},\cdots\cdots,\mathbf{CA}^{k-1}$ の一次結合で表わされる[6]ことに注意すれば命題1の成立は明らかである。

なお，$\mathbf{R}_n$およびβを線形システムの場合と同様にそれぞれ可観測性マトリクス，可観測性指数と以後よぶことにする。

〔命題2〕 システムS_1は可観測とする。このときシステムS_1は代数的等価なシステムS_2に変換できる。

$$\mathrm{S}_2:\left.\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{x}}(k+1)&=u_p(k)\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{x}}(k)+\tilde{\mathbf{B}}\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)&=\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\boldsymbol{x}}(k)\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ただし，

$$\tilde{\mathbf{A}}\triangleq\begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{A}}_{1,1} & \tilde{\mathbf{A}}_{1,2} & \cdots & \tilde{\mathbf{A}}_{1,m}\\ \tilde{\mathbf{A}}_{2,1} & \tilde{\mathbf{A}}_{2,2} & & \tilde{\mathbf{A}}_{2,m}\\ \vdots & & \ddots & \cdots\\ \tilde{\mathbf{A}}_{m,1} & \cdots & & \tilde{\mathbf{A}}_{m,m}\end{pmatrix},\ \tilde{\mathbf{B}}\triangleq[\tilde{\mathbf{B}}_1{}^T\vdots\cdots\vdots{}_m\tilde{\mathbf{B}}^T]^T,$$

$$\tilde{\mathbf{C}}\triangleq[\tilde{\mathbf{C}}_1\vdots\cdots\vdots\tilde{\mathbf{C}}_m]$$

であり，$\tilde{\mathbf{A}}_{i,j}\in\mathbf{R}^{\beta i\times\beta j}$，$\tilde{\mathbf{C}}_i\in\mathbf{R}^{m\times\beta i}$ はつぎの形をしている。

$$\tilde{\mathbf{A}}_{i,i}\triangleq\left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \boldsymbol{a}_{i,i}\\ 0 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array}\right];\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{i,j}\triangleq[\mathbf{O}_{\beta i,\beta j-1}\ \vdots\ \boldsymbol{a}_{i,j}];\ i,j=1,2,\cdots\cdots,m(i\neq j)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_i\triangleq[\mathbf{O}_{m,\beta i-1}\ \vdots\ \mathbf{e}_i];\ i=1,2,\cdots\cdots,m$$

ここで，$\beta_j\geq1;\forall j$ は$\sum_{j=1}^{m}\beta_j=n$，$max\,\{\beta_j\}=\beta$を満たすようなクロネッカ指数とよばれるシステムに固有の指数である。また$\mathbf{e}_i$は第i要素のみ1をもつn次単位行ベクトルである。

（証明） システムS_1は可観測であるから，その可観測性マトリクス$\mathbf{R}_n$は最大階数をもつ。したがって，$\mathbf{R}_n$の$(m\times n)$個の行ベクトルの中から，

$$\mathbf{C}_1,\mathbf{C}_2,\cdots\mathbf{C}_m,\mathbf{C}_1\mathbf{A},\cdots\mathbf{C}_m\mathbf{A},\cdots\mathbf{C}_1\mathbf{A}^{n-1}\cdots\mathbf{C}_m\mathbf{A}^{n-1}$$

の順に一次独立なベクトルをn個選び出すことができる。ただし，$\mathbf{C}_i\in\mathbf{R}^n; i=1,\ 2,\cdots m$はマトリクス$\mathbf{C}$の第$i$行ベクトルである。

順序を入れ換えてマトリクス$\mathbf{V}$とその逆マトリスクをつぎのように定義する。

$$\begin{aligned}\mathbf{V}\triangleq[&\mathbf{C}_1{}^T\vdots\mathbf{A}^T\mathbf{C}_1{}^T\vdots\cdots\vdots(\mathbf{A}^{\beta_1-1})^T\mathbf{C}_1{}^T\vdots\mathbf{C}_2{}^T\vdots\cdots\vdots(\mathbf{A}^{\beta_2-1})^T\mathbf{C}_2{}^T\vdots\\&\cdots\vdots\mathbf{C}_m{}^T\vdots\cdots\vdots(\mathbf{A}^{\beta m-1})^T\mathbf{C}_m{}^T\end{aligned} \tag{13}$$

$$\mathbf{V}^{-1}\triangleq[\boldsymbol{v}_{1,1},\boldsymbol{v}_{1,2},\cdots,\boldsymbol{v}_{1,\beta1},\boldsymbol{v}_{2,1},\cdots,\boldsymbol{v}_{2,\beta2},\cdots\boldsymbol{v}_{m,\beta m}] \tag{14}$$

(14)式から，座標変換マトリクスをつぎのように構成する。

$$\mathbf{T} \triangleq [v_{1,\beta 1}, \mathbf{A}v_{1,\beta 1} \cdots \mathbf{A}^{\beta_1 -1} \cdots v_{1,\beta 1}, v_{2,\beta 2}, \cdots, \mathbf{A}^{\beta_m -1} v_{m,\beta m}] \quad (15)$$

このマトリクスによって，$\tilde{x} = \mathbf{T}^{-1}x$ なる変換をシステム S_1 に施せばシステム S_2 を得る[7),8),注)]　　　（証明終り）

なお，以下では上述の性質をもつようなシステム，すなわち，可観測であるシステム S_1 に限定して考察を進めることにする。

3．オブザーバの設計

前節で記述された双線形システムに対して原等の示した標準形でオブザーバを構成するためにはシステム S_1 の係数マトリクス $\mathbf{A}$ に苛酷な条件が強いられる。また，オブザーバは双線形の形とはならない[3)]。しかし，ここで記述されたような双線形システムに対しては双線形システムでオブザーバを構成する方がより自然であろう[9)]。したがってここではシステム S_1 に対するオブザーバとして次式で与えられるような双線形システム S_0 を考える。

$$\left.\begin{aligned} S_0 : z(k+1) &= u_p(k)\mathbf{UAJ}z(k) + u_p(k)\mathbf{UAG}z(k) + \\ &\quad \mathbf{UB}u(k) \\ \bar{x}(k) &= \mathbf{J}z(k) + \mathbf{G}y(k) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

ただし，$z(k) \in R^l$ は S_0 の内部状態，$\bar{x}(k) \in R^n$ は推定値である。また，$\mathbf{U} \in R^{l \times n}$，$\mathbf{J} \in R^{n \times l}$ および $\mathbf{G} \in R^n$ は次式を満たすものとする。

$$\mathbf{JU} + \mathbf{GC} = \mathbf{I}_n \quad (17)$$

＜定義2＞　システム S_1 と S_0 において，それぞれの初期状態 $x(0)$，$z(0)$ および入力 $u(k)$ に関係なく有限ステップNで，

$$x(k) = \bar{x}(k)\,;\ {}^\forall k \geq \mathrm{N} \quad (18)$$

となるとき，システム S_0 をシステム S_1 のオブザーバといい，Nを決定ステップ数とよぶ。

〔定理1〕　システム S_0 がシステム S_1 のオブザーバであるための必要十分条件は，マトリクス $(\mathbf{I}_n - \mathbf{GC})\mathbf{A}$ がべき零となることである。

（証明）　いま，システム S_0 の推定誤差を $e(k) \triangleq x(k) - \bar{x}(k)$ とおけば，(1)式および(16)式よりつぎの関係式を得る。

$$\begin{aligned} e(k) &= u_p(k-1)(\mathbf{I}_n - \mathbf{GC})\mathbf{A}e(k-1) \\ &= u_p(k-1) \cdot u_p(k-2)\{(\mathbf{I}_n - \mathbf{GC})\mathbf{A}\}^2 e(k-2) \\ &= u_p(k-1) \cdot u_p(k-2) \cdots\cdots u_p(0)\{\mathbf{I}_n - \mathbf{GC}) \cdot \\ &\quad \mathbf{A}\}^k e(0) \end{aligned} \quad (19)$$

上式と前述のオブザーバの定義より必要性は明らかである。十分性も入力が有界であることに注意すれば上式より明らかである。なお，あるステップ q において，もし $u_p(q) = 0$ であればマトリクス $(\mathbf{I}_n - \mathbf{GC})\mathbf{A}$ とは無関係に $e(k) = \mathbf{O}_n (k \geq q)$ となる。　　　（証明終り）

上記定理はオブザーバの設計問題が未知パラメータ $\mathbf{U}$，$\mathbf{J}$，$\mathbf{G}$ を適当に選んでマトリクス $(\mathbf{I}_n - \mathbf{GC})\mathbf{A}$ をべき零にする問題に帰着されることを示している。さらに，これら未知パラメータのうち，設計パラメータとしては $\mathbf{G}$ のみを考えればよいことがわかる。なぜならば任意の $\mathbf{G}$ に対して，(17)式を満たす $\mathbf{J}$，$\mathbf{U}$ は必ず存在し，かつ，このような $\mathbf{J}$ と $\mathbf{U}$ は一意的ではないが，これらを用いて構成されたオブザーバは全て等価となるからである。ただし，等価とは同一の初期値 $z(0)$ および観測値 $y(j)\,;\, j = 0, 1, \cdots, i$，制御入力 $u(i)\,;\, i = 0, 1, \cdots, i-1$ に対して同一の推定値 $\bar{x}(i)$ を発生することを意味する。

また，オブザーバの次元はマトリクス $(\mathbf{I}_n - \mathbf{GC})$ を2つのマトリクスの積 $\mathbf{JU}$ に分解することによって決定されるが，低次元のオブザーバを得るためにはこの $(\mathbf{I}_n - \mathbf{GC})$ を最大階数分解すればよい。なお，本稿では $\mathbf{U}, \mathbf{J}$ は $(\mathbf{I}_n - \mathbf{GC})$ を最大階数分解して得られるものとする。

4．最小次元オブザーバとその最小決定ステップ数

続いて，オブザーバの最小次元数とその最小決定ステップ数について考察を進めよう。

(17)式から明らかなようにシステム S_0 の次元数 l は次式で表わされる。

$$l \geq rank(\mathbf{I}_n - \mathbf{GC}) \quad (20)$$

ここで，$rank\,\mathbf{C} = m$ であることに着目すればシステム S_0 は最低 $n-m$ 次元必要であることがわかる。したがって，$n-m$ 次元のオブザーバが構成できれば，それはシステム S_1 の最小次元オブザーバである。

（注意）　(17)式が仮定されない一般の形でのオブザーバの次元数 l^* は，$l^* = rank\{[\mathbf{I}_n - \mathbf{GC}][\mathbf{AB}]\}$ で決定されることが文献10より導びかれる。したがって，$\mathbf{A}$ が正則ということでの仮定の下では $\min_{\mathbf{G}} rank(\mathbf{I}_n - \mathbf{GC}) = n-m$ が最小次元数である。

以下では次元数 $n-m$ をもつオブザーバを具体的に構成しよう。

≪補題≫

$$\min_{\mathbf{G}} rank\,(\mathbf{I}_n - \mathbf{GC}) = n-m \quad (21)$$

注）システム S_1 とシステム S_2 の係数マトリクスの間にはつぎの関係が成り立っている。
$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$，$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$，$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{CT}$

を満たす$\mathbf{G}$を$\mathbf{G}_M$で表わすことにする。このとき，$\mathbf{G}_M$を用いて構成されたシステムS_0とS_1の誤差方程式は次式で表現できる。

$$e(k)=u_p(k-1)(\mathbf{I}_n-\mathbf{GC})\mathbf{A}(\mathbf{I}_n-\mathbf{GC})e(k-1) \tag{22}$$

（証明）　(19)式は次式に変形できる。

$$\begin{aligned}e(k)&=u_p(k-1)(\mathbf{I}_n-\mathbf{GC})\mathbf{A}\{(\mathbf{I}_n-\mathbf{GC})x(k-1)\\&\quad-\mathbf{J}z(k-1)\}\\&=u_p(k-1)(\mathbf{I}_n-\mathbf{GC})\mathbf{AJ}\{\mathbf{U}x(k-1)-z(k-1)\}\end{aligned} \tag{23}$$

また，(17)式はつぎのように表現できる。

$$[\,\mathbf{J}\,\vdots\,\mathbf{G}\,]\begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ \hdashline \mathbf{C}\end{bmatrix}=\mathbf{I}_n \tag{24}$$

さて，$rank\,(\mathbf{I}_n-\mathbf{G}_M\mathbf{C})=n-m$ が満たされているとき，(17)式を最大階数分解して得られた $\mathbf{J}\in\mathrm{R}^{n\times(n-m)}$, $\mathbf{U}\in\mathrm{R}^{(n-m)\times n}$ を用いれば(24)式の関係より次式が成立しなくてはならない。

$$[\,\mathbf{J}\,\vdots\,\mathbf{G}_M\,]=\begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ \hdashline \mathbf{C}\end{bmatrix}^{-1} \tag{25}$$

すなわち，$\mathbf{UJ}=\mathbf{I}_{n-m}$, $\mathbf{UG}_M=\mathbf{O}_{n-m,n-m}$ この関係を(16)式に適用すれば，

$$\mathbf{U}\bar{x}(k)=\mathbf{UJ}z(k)+\mathbf{UG}_M y(k)=z(k) \tag{26}$$

が導びかれる。つぎに，(26)式を(23)式に代入すれば(22)式を得る。[11]　　（証明終り）

上記補題より定理1の系として次を得る。

《系》　システムS_0が最小次元オブザーバであるための必要十分条件はマトリクス $(\mathbf{I}_n-\mathbf{G}_M\mathbf{C})\,\mathbf{A}\,(\mathbf{I}_n-\mathbf{G}_M\mathbf{C})$ がべき零であることである。

さて，(21)式を満たすような$\mathbf{G}_M$は$\mathbf{C}$の一般化逆マトリクス$\mathbf{C}^-$に限られる[12]ことに注意して，$\mathbf{C}^-$の集合$\{\mathbf{C}^-\}$の中から$\mathbf{G}_M$を適当に選べばマトリクス $(\mathbf{I}_n-\mathbf{G}_M\mathbf{C})\,\mathbf{A}\,(\mathbf{I}_n-\mathbf{G}_M\mathbf{C})$ をべき零にできることを示そう。

マトリクスをべき零にすることとそのマトリクスの固有値を全て零にすることとは同値であり，また，相似変換は固有値に関して不変であるから，$(\mathbf{I}_n-\mathbf{G}_M\mathbf{C})\mathbf{A}(\mathbf{I}_n-\mathbf{G}_M\mathbf{C})$を変換マトリスク$\mathbf{T}$を用いて相似変換したつぎのマトリクスの固有値について考えればよいことがわかる。

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{I}_n-\mathbf{G}_M\mathbf{C})\mathbf{A}(\mathbf{I}_n-\mathbf{G}_M\mathbf{C})\mathbf{T}\triangleq(\mathbf{I}_n-\tilde{\mathbf{G}}_M\tilde{\mathbf{C}})\tilde{\mathbf{A}}\cdot(\mathbf{I}_n-\tilde{\mathbf{G}}_M\tilde{\mathbf{C}}) \tag{27}$$

ただし，$\tilde{\mathbf{G}}_M\triangleq\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}_M$ である。

$\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ が，(12)式の形をしていることに注意して，$\tilde{\mathbf{G}}_M\in\{\tilde{\mathbf{C}}^-\}$を次のマトリクスに選ぶことにする。

$$\tilde{\mathbf{G}}_M\triangleq\tilde{\mathbf{C}}^T(\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{C}}^T)^{-1} \tag{28}$$

(28)式で与えられる$\tilde{\mathbf{G}}_M$が$\tilde{\mathbf{C}}$の一般化逆マトリクスであることは容易に確められる。

この$\tilde{\mathbf{G}}_M$を用いて(27)式を計算すればつぎのようになる。

$$(\mathbf{I}_n-\tilde{\mathbf{G}}_M\tilde{\mathbf{C}})\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{I}_n-\tilde{\mathbf{G}}_M\tilde{\mathbf{C}})=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & & & \mathbf{O}\\ & \mathbf{Z}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \mathbf{Z}_m\end{bmatrix} \tag{29}$$

ただし，

$$\mathbf{Z}_i\triangleq\begin{bmatrix}0 & \cdots & \cdots & 0\\ 1 & \ddots & & \vdots\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & 1 & 0\ 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0\ 0\end{bmatrix}\in\mathrm{R}^{\beta i\times\beta i}\,;\ i=1,\ 2,\cdots\cdots,m$$

$\mathbf{Z}_i$は明らかに指数β_i-1のべき零マトリクスである。したがって，$(\mathbf{I}_n-\mathbf{G}_M\mathbf{C})\ \mathbf{A}\ (\mathbf{I}_n-\mathbf{G}_M\mathbf{C})$ は$\max_j\beta_j-1$，すなわち指数$\beta-1$のべき零マトリクスであることがわかる。

以上をまとめるとつぎの結論を得る。

〖定理2〗　システムS_1は可観測とする。このとき，システムS_1に対するオブザーバS_0の最小次元数$n-m$である。また，そのようなオブザーバを構成する$\tilde{\mathbf{G}}_M$は次式で与えられる。

$$\tilde{\mathbf{G}}_M=\tilde{\mathbf{C}}^T(\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{C}}^T)^{-1} \tag{30}$$

つぎに，ここで示した最小次元オブザーバの最小決定ステップ数$\mathbf{N}_m$について評価しておこう。

一般に，最小決定ステップ数は初期状態 $x(0)$, $z(0)$ によって異なるがここではつぎの定義に従うものとする。

＜定義3＞　システムS_1およびオブザーバS_0の初期状態$x(0)$, $z(0)$ を任意に選んだときの最小決定ステップ数の最大値をオブザーバS_0の最小決定ステップ数とよぶ。

上記に従えば最小次元オブザーバの最小決定ステップ数は上述のことより以下となる。

〖定理3〗　最小次元オブザーバにおいて，正確な推定値を得るために必要な最小決定ステップ数は$\beta-1$である。注)

最後に簡単な数値例を上げておく。

（数値例）　つぎの双線形システムを考える。

$$x(k+1)=u_2(k)\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & -1/2\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1/2 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1/2 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}u(k) \tag{31}$$

注）$\mathrm{N}(\cdot)$を・の零空間とする。このとき，明らかに $e(0)\in\mathrm{N}[\{(\mathbf{I}_n-\mathbf{G}_M\mathbf{C})\mathbf{A}(\mathbf{I}_n-\mathbf{G}_M\mathbf{C})\}^{\delta}]$; $\delta=0,1,\cdots,\beta-1$ に対して$e(k)=\mathbf{O}_n k\geq\delta$である。すなわち，ある$x(0)$, $z(0)$に対しては$\beta-1$より小さなステップ数で正確な値が得られることになる。

$$\boldsymbol{y}(k)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)$$

ここで，容易に確められるように，$\mathbf{A}$ は正則であり，$\beta=3$，$rank\,\mathbf{C}=2$ である。

可観測性マトリクスの5本の一次独立な行ベクトルからつぎの変換マトリクス$\mathbf{T}$が構成できる。

$$\mathbf{T}\triangleq\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}\tag{32}$$

このときシステムS_1の係数マトリクスはつぎの形に変換される。

$$\tilde{\mathbf{A}}\triangleq\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\left[\begin{array}{cc:ccc}0&1&0&0&1\\1&-1&0&0&\frac{1}{2}\\\hdashline 0&-1&0&0&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&1&0&1\\0&0&0&1&-1\end{array}\right],\ \tilde{\mathbf{B}}\triangleq\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}=\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&-1\\\hdashline -1&1\\0&1\\\frac{1}{2}&1\end{array}\right]\tag{33}$$

$$\tilde{\mathbf{C}}\triangleq\mathbf{C}\mathbf{T}=\left[\begin{array}{cc:ccc}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

設計パラメータ$\tilde{\mathbf{G}}_M$はつぎのようになる。

$$\tilde{\mathbf{G}}_M\triangleq\tilde{\mathbf{C}}^T(\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{C}}^T)^{-1}=\left[\begin{array}{cc:ccc}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right]^T\tag{34}$$

(34)式で決定された$\tilde{\mathbf{G}}_M$を用いて $(\mathbf{I}_n-\tilde{\mathbf{G}}_M\tilde{\mathbf{C}})$ を計算すれば(35)式のようになる。

$$\mathbf{I}_n-\tilde{\mathbf{G}}_M\tilde{\mathbf{C}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\tag{35}$$

$(\mathbf{I}_n-\tilde{\mathbf{G}}_M\tilde{\mathbf{C}})$ を元の座標に戻せば以下のマトリクスが得られる。

$$\mathbf{I}_n-\mathbf{G}_M\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\tag{36}$$

$(\mathbf{I}_n-\mathbf{G}_M\mathbf{C})$ の最大階数分解によって得られる$\mathbf{J}$，$\mathbf{U}$の1つは次式となる。

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\ \mathbf{U}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\tag{37}$$

また，$\tilde{\mathbf{G}}_M$ を元の座標に戻せば(35)式となる。

$$\mathbf{G}_M=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}^T\tag{38}$$

結局，求めるオブザーバはつぎのようになる。なお，このオブザーバの最小決定ステップ数は2であることがわかる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}(k+1)&=u_2(k)\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{z}(k)+u_2(k)\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&1\\-1&\frac{1}{2}\\1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{y}(k)\\&\quad+\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\\1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(k)\\\bar{\boldsymbol{x}}(k)&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{z}(k)+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\0&0\\0&0\\1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{y}(k)\end{aligned}\tag{39}$$

5. あとがき

本稿では多出力をもつ離散時間型双線形システムに対するオブザーバの設計法を述べた。対象としたシステムは(1)式で記述されるクラスのシステムであり，可観測性が満たされるものと仮定した。

本方法によって構成されたオブザーバは最小次元であり，被対象システムの可観測性指数から1を引いた修正ステップで正確にシステムの内部状態を推定できる。

なお，(1)式で記述されるシステムは特殊な形をした双線形システムであるが，これは生物プロセス等にしばしば表われる数学モデルの一形態である。

最後に，著者の一人が日頃お世話になっている神戸大学工学部教授前川禎男，助手雛元孝夫の両先生に深く感謝の意を表する。

文　　献

1）古荘純次，第17回自動制御連合講演会前刷(昭49-11)，133
2）井上　昭，第11回計測自動制御学会学術講演会前刷（昭47-8)，43
3）原・古田，計測自動制御学会論文集，12-6(昭51-12)，629
4）R. R. Mohler, IEEE. J, Solid-state Circuit, SC-6(1970)，71
5）雛元・下西・前川，電子通信学会論文誌，J61-A-5（昭53-5)，504
6）児玉・須田・池田，システムと制御，17-6（昭48-6)，374
7）舟橋・中村，第4回統計学的制御理論シスポジウム予稿集（昭47-11)，51
8）D. G. Luenberger, IEEEE. Trans, AC-12(1967)，290
9）雛元・下西・前川，第20回自動制御連合講演会前刷，（昭52-12)，209
10）吉川恒夫，システムと制御，18-2（昭49-2)，125
11）雛元・下西・前川，計測自動制御学会論文集，14-5（昭53-10)，掲載決定
12）明石・今井，システムと制御，20-11（昭51-11)，631