或る種の関数方程式について

中　田　道　孝

A 緒　　論

高等学校の数学の教科書中に次の様な問題を散見する。

次の等式を満す関数の各例を挙げよ。

① $f(x+y)=f(x)+f(y)$

② $g(x+y)+g(x-y)=2\{g(x)+g(y)\}$

③ $h(x+y)=h(x)h(y)$

勿論，ここで扱う関数は実数全体を定義域とする実数値関数である。

①，②，③の例としては，それぞれ $f(x)=x, g(x)=x^2, h(x)=2^x$ を挙げればよかろう。しかし，これらの関数方程式を満す関数を全て求めるにはどうしたらよいだろうか。

B 連続な解を求めること。

① $f(x+y)=f(x)+f(y)$ の場合

$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ より $f(0)=0$

$\therefore\ f(0x)=f(0)=0=0f(x)$

$f(1x)=f(x)=1f(x)$

今一つの自然数 k に対し，$f(kx)=kf(x)$ と仮定すれば

$f\{(k+1)\}x=f(kx+x)=f(kx)+f(x)=kf(x)+f(x)$

$=(k+1)f(x)$

よって数学的帰納法により，全ての自然数 n に対し，$f(nx)=nf(x)$

$0=f(0)=f\{nx+(-nx)\}=f(nx)+f(-nx)=nf(x)$

$+f(-nx)$

$\therefore\ f(-nx)=-nf(x)$

よって全ての整数 m に対し，$f(mx)=mf(x)$

$$nf\left(\frac{m}{n}x\right)=f\left(n\frac{m}{n}x\right)=f(mx)=mf(x)$$

$$\therefore\ f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}f(x)$$

よって全ての有理数 r に対し，$f(rx)=rf(x)$

α が無理数の時，α に収束する有理数列 $\{r_n\}$ をとり，$f(x)$ が連続関数であると仮定すれば

$$f(\alpha x)=\lim_{n\to\infty}f(r_nx)=\lim_{n\to\infty}r_nf(x)=\alpha f(x)$$

よって任意の実数 a に対し，$f(ax)=af(x)$

$\therefore\ f(a)=f(a\cdot 1)=af(1)$

$f(1)=c$ とおけば $f(x)=cx$

② $g(x+y)+g(x-y)=2\{g(x)+g(y)\}$ の場合

$g(0+0)+g(0-0)=2\{g(0)+g(0)\}\quad\therefore\ 2g(0)=4g(0)$

$\therefore\ g(0)=0\qquad g(0x)=g(0)=0=0^2g(x)$

$g(0+y)+g(0-y)=2\{g(0)+g(y)\}$

$\therefore\ g(y)+g(-y)=2g(y)\qquad\therefore\ g(y)=g(-y)$

$g(x+x)+g(x-x)=2\{g(x)+g(x)\}$

$g(2x)=4g(x)$

今一つの自然数 k に対し，$g(kx)=k^2g(x)$ と仮定せば

$g\{(k+1)x\}+g\{(k-1)x\}=g(kx+x)+g(kx-x)$

$=2\{g(kx)+g(x)\}=2(k^2+1)g(x)$

$\therefore\ g\{(k+1)x\}=\{2(k^2+1)-(k-1)^2\}g(x)$

$=(k+1)^2g(x)$

よって全ての自然数 n に対し，$g(nx)=n^2g(x)$

$g(-nx)=g(nx)=n^2g(x)=(-n)^2g(x)$

よって全ての整数 m に対し，$g(mx)=m^2g(x)$

$$n^2g\left(\frac{m}{n}x\right)=g\left(n\frac{m}{n}x\right)=g(mx)=m^2g(x)$$

$$\therefore\ g\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m^2}{n^2}g(x)$$

よって全ての有理数 r に対し $g(rx)=r^2g(x)$

α が無理数の時，α に収束する有理数列 $\{r_n\}$ をとれば，

$$g(\alpha x)=\lim_{n\to\infty}g(r^nx)=\lim_{n\to\infty}r_n{}^2g(x)=\alpha^2g(x)$$

よって全ての実数 a に対し，$g(ax)=a^2g(x)$

$g(a)=g(a\cdot 1)=a^2g(1)\qquad g(1)=c$ とおけば

$g(x)=cx^2$ 但し $g(x)$ は連続であると仮定した。

③ $h(x+y)=h(x)h(y)$ の場合

$h(0)=h(0+0)=h(0)h(0)\qquad\therefore\ h(0)\{h(0)-1\}=0$

$\therefore\ h(0)=0$ 又は $h(0)=1$

$h(0)=0$ ならば，全ての x に対し

$h(x)=h(x+0)=h(x)h(0)=h(x)\times 0=0$

よって恒等的に $h(x)=0$

$h(0)=1$ の時 $h(a)=0$ なる a が存在すれば

$1=h(0)=h\{a+(-a)\}=h(a)h(-a)=0h(-a)=0$ となり矛盾

よって全ての x に対し $h(x)\neq 0$

$h(0x)=h(0)=1=\{h(x)\}^0$

$h(1x)=h(x)=\{h(x)\}^1$

今一つの自然数 k に対し，$h(kx)=\{h(x)\}^k$ と仮定せば

$h\{(k+1)x\}=h(kx+x)=h(kx)h(x)=\{h(x)\}^k h(x)$

$=\{h(x)\}^{k+1}$

よって数学的帰納法により，全ての自然数 n に対し，

$h(nx)=\{h(x)\}^n$

$1=h(0)=h\{nx+(-nx)\}=h(nx)h(-nx)$

$=\{h(x)\}^n h(-nx)$

$\therefore\quad h(-nx)=\dfrac{1}{\{h(x)\}^n}=\{h(x)\}^{-n}$

よって全ての整数 m に対し，$h(mx)=\{h(x)\}^m$

今 $h(b)<0$ なる b が存在すれば

$\left\{h\left(\dfrac{b}{n}\right)\right\}^n=h\left(n\dfrac{b}{n}\right)=h(b)<0$

よって n が偶数のとき $h\left(\dfrac{b}{n}\right)$ は実数で有り得ない。

よって全ての自然数 x に対して $h(x)>0$

$\left\{h\left(\dfrac{m}{n}x\right)\right\}^n=h\left(n\dfrac{m}{n}x\right)=h(mx)=\{h(x)\}^m$

$\therefore\quad h\left(\dfrac{m}{n}x\right)=\{h(x)\}^{\frac{m}{n}}$

よって全ての有理数 r に対し，$h(rx)=\{h(x)\}^r$

α が無理数のとき，α に収束する有理数列 $\{r_n\}$ をとり，

$h(x)$ の連続性を仮定すれば

$h(\alpha x)=\lim_{n\to\infty} h(r_n x)=\lim_{n\to\infty}\{h(x)\}^{r_n}=\{h(x)\}^\alpha$

よって全ての実数 a に対し，$h(ax)=\{h(x)\}^a$

$\therefore\quad h(a)=h(a\cdot 1)=\{h(1)\}^a$

$h(1)=c$　とおけば　$h(x)=c^x$

よって，$h(x)$ の求める形は

$h(x)=0$　及び　$h(x)=c^x (c>0)$　である。

上記の ①，②，③ に於ては各関数の連続性を仮定して，形を求めたが，連続性を仮定しなかったら，どうであろうか。

この問題を解決する為に実数全体の有理数全体に対する基底というものを以下で考察する。

C　基底について

相異なる有限個の実数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, am$ に対し，全ては 0 でない有理数 $r_1, r_2, \cdots\cdots, rm$ が存在して，

$r_1a_1+r_2a_2+\cdots\cdots+r_ma_m=0$　になれば，

$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_m$ は有理従属であるという。

相異なる有限個の実数 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ が有理従属でないとき，換言すれば $s_1, s_2, \cdots\cdots, s_n$ が有理数で

$s_1b_1+s_2b_2+\cdots\cdots+s_nb_n=0$　ならば，

必ず $s_1=s_2=\cdots\cdots=s_n=0$ になれば，$b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ は有理独立であるという。

実数 c が，相異なる有限個の実数 $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_e$ を用いて，$c=t_1c_1+t_2c_2+\cdots\cdots+t_ec_e$ と表わせる時（$t_1, t_2, \cdots\cdots, t_e$ は有理数）c は $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_e$ の有理結合であるという。

実数からなる集合Mから，どんな相異なる有限個の元をとっても，有理独立であるとき，Mは有理独立であるという。

実数からなる集合Nが有理独立でないとき，換言すれば，適当な相異なる有限個の元をとれば有理従属であるとき，N は有理従属であるという。

実数 a が，実数からなる集合Lの適当な相異なる有限個の元の有理結合で表わされる時，a はLの有理結合であるという。

今，有理独立な実数からなる集合の全体を $\mathfrak{M}$ とする。$\mathfrak{M}\ni\{1\}$ だから $\mathfrak{M}$ は空でない。又，$\mathfrak{M}$ は集合の包含関係の下に順序集合を作る。

$\mathfrak{M}$ の任意の全順序部分集合を $\mathfrak{A}$ とする。

$S_0=\bigcup_{S\in\mathfrak{A}} S$ が有理従属ならば，S_0 の中に有理従属な相異なる有限個の元 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ が存在する。

$a_i\in S_i\in\mathfrak{A}\ (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

$\mathfrak{A}$ は全順序だから，$\mathrm{Max}\ (S_1, S_2, \cdots\cdots, S_n)=S_p$ とすれば $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n\in S_p$ となり，S_p が有理独立であることに反する。

よって，S_0 は有理独立となり，$S_0\in\mathfrak{M}$　$\mathfrak{A}\ni{}^\forall S$ に対し，$S\subseteq\bigcup_{S\in\mathfrak{A}} S=S_0$

又，$\mathfrak{A}\ni{}^\forall S$ に対し，$S\subseteq T$ ならば，$S_0=\bigcup_{S\in\mathfrak{A}} S\subseteq T$

よって，S_0 は $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{M}$ における上限である。

従って，$\mathfrak{M}$ は集合の包含関係のもとに帰納的順序集合をなすから，Zorn の補題により，$\mathfrak{M}$ は極大元Eをもつ。

Eは極大有理独立部分集合である。

（Eの集合としての濃度は，連続体の濃度に等しいことが知られている）

任意の実数 x に対し，$x\in E$ ならば $x=1\cdot x$ はEの有理結合であ。

$x\notin E$ ならば $\{x\}\cup E$ は有理従属だから，Eの相異なる有限個の元 $e_1, e_2, \cdots\cdots, e_n$ が存在して，

$x, e_1, e_2, \cdots\cdots, e_n$ が有理従属になる。

よって全ては 0 でない有理数 $r, r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n$ が存在し，

$rx+r_1e_1+r_2e_2+\cdots\cdots+r_ne_n=0$

E は有理独立だから $r\neq 0$ で

$x=\left(-\dfrac{r_1}{r}\right)e_1+\left(-\dfrac{r_2}{r}\right)e_2+\cdots\cdots+\left(-\dfrac{r_n}{r}\right)e_n$

よって x はEの有理結合である。

これより任意の実数がEの有理結合で表わされることがわかる。

今 $x=r_1e_1+\cdots\cdots r_ne_n=s_1e_1+s_2e_2+\cdots\cdots s_ne_n$ とすれば

$$(r_1-s_1)e_1+(r_2-s_2)e_2+\cdots\cdots+(r_n-s_n)e_n=0$$

Eは有理独立だから

$$r_1-s_1=r_2-s_2=\cdots\cdots=r_n-s_n=0$$

$\therefore\ r_1=s_1,\ r_2=r_2,\ \cdots\cdots,\ r_n=s_n$

これより任意の実数はEの有理結合として，一意的に表わされることを知る。

このEを実数全体の有理数全体に対する基底という。

D　連続でない解を求めること。

① $f(x+y)=f(x)+f(y)$ の場合，

$E\ni{}^{\forall}e$ に対し $f(e)$ を勝手に定める。但しEの少なく共二つの元 e_0, e'_0 に対し，$f(e_0): f(e'_0)\neq e_0:e'_0$ なるようにしておく。

そして任意の実数 $x=r_1e_1+r_2e_2+\cdots\cdots+r_ne_n$（$r_i$ は有理数，$e_i\in E$）に対し，$f(x)=r_1f(e_1)+r_2f(e_2)+\cdots\cdots+r_nf(e_n)$ と定めれば，$f(x)$ が連続でない求める関数になることが容易に確かめられる。

② $g(x+y)+g(x-y)=2\{g(x)+g(y)\}$ の場合

$E\ni{}^{\forall}e$ に対し，$g(e)$ を勝手に定める。但し，Eの少なく共二つの元 e_0，e'_0 に対し，$g(e_0):g(e'_0)\neq e_0^2:e'^2_0$ であるようにしておく。

そして，任意の実数 $x=r_1e_1+r_2e_2+\cdots\cdots+r_ne_n$ に対し，$g(x)=r^2g(e_1)+r_2^2g(e_2)+\cdots\cdots+r_n^2g(e_n)$ と定める。

別の $y=s_1e_1+s_2e_2+\cdots\cdots+s_ne_n$ に対し

$g(y)=s_1^2g(e_1)+s_2^2g(e_2)+\cdots\cdots+s_n^2g(e_n)$ で

$x+y=(r_1+s_1)e_1+(r_2+s_2)e_2+\cdots\cdots+(r_n+s_n)e_n$

$x-y=(r_1-s_1)e_1+(r_2-s_2)e_2+\cdots\cdots+(r_n-s_n)e_n$ だから

$$\begin{aligned}g(x+y)+g(x-y)&=\{(r_1+s_1)^2g(e_1)+(r_2+s_2)^2g(e_2)+\cdots\cdots\\&\quad+(r_n+s_n)^2g(e_n)\}+\{(r_1-s_1)^2g(e_1)+(r_2-s_2)^2g(e_2)+\cdots\cdots\\&\quad+(r_n-s_n)^2g(e_n)\}\\&=2\{(r_1^2+s_1^2)g(e_1)+(r_2^2+s_2^2)g(e_2)+\cdots\cdots+(r_n^2+s_n^2)g(e_n)\}\\&=2\{g(x)+g(y)\}\end{aligned}$$

もしも，$g(x)$ が連続ならばBより，$g(x)=cx^2$ となり，$g(e_0):g(e'_0)=ce_0^2:ce'^2_0=e_0^2:e'^2_0$ で矛盾。

よって，$g(x)$ は連続でない求める関数となる。

③ $h(x+y)=h(x)h(y)$ の場合

$E\ni{}^{\forall}e$ に対し，$h(e)$ を正の値で勝手に定める。但し，Eの少なく共二つの元 e_0，e'_0 に対し，$\log\{h(e_0)\}:\log\{h(e'_0)\}\neq e_0:e'_0$ であるようにしておく。

そして，任意の実数 $x=r_1e_1+r_2e_2+\cdots\cdots+r_ne_n$ に対し，$h(x)=\{h(e_1)\}^{r_1}\{h(e_2)\}^{r_2}\cdots\{h(e_n)\}^{r_n}$ と定めれば，$h(x)$ は連続でない求める関数となることが容易に確められる。