二 重 不 定 積 分 の 概 念

中　田　道　孝

1 緒　　論

普通の積分には不定積分と定積分があるが，二重積分には定積分しかない。そこで私は二重積分にも不定積分の概念を考えることにした。

二変数x，yの関数$f(x, y)$に対して，別の関数$F(x, y)$があつて$\frac{\delta^2 F}{\delta x\delta y}=\frac{\delta^2 F}{\delta y\delta x}=f(x, y)$になるとき，$F(x, y)$は$f(x, y)$の二重原始関数又は二重不定積分であると呼び，$F(x, y)=\int\int f(x, y)\,dx\,dy$と表わすことにしよう。

定理１，連続関数$f(x, y)$の二重原始関数は必ず存在する。

（証明）$f(x, y)$は連続関数だから，二重定積分

$\int_a^x\int_b^y f(x, y)dydx=G(x, y)$が存在する。

そして$\frac{\delta G}{\delta x}=\int_b^y f(x, y)\,dy$，$\frac{\delta^2 G}{\delta y\partial x}=f(x, y)$

同様に$\frac{\delta^2 G}{\delta x\delta y}=f(x, y)$よって$G(x, y)$は$f(x, y)$の二重原始関数である。

次の定理の証明は容易である。

定理２，$F(x, y)$，$G((x, y)$が同一の関数の原始関数である為の必要十分条件は$G(x, y)=F(x, y)+\varphi(x)+\psi(y)$と表わされることである。（ここに$\varphi(x)$，$\psi(y)$はそれぞれ$x$，$y$だけの関数である。）

注意，$\int\int f(x, y)dxdy=\int(\int f(x, y)dx)\,dy=\int(\int f(x, y)dy)dx$と考えてよい。

2 二重定積分と二重不定積分の関連

定理３，$F(x, y)=\int\int f(x, y)dxdy$ならば

$\int_a^c\int_b^d f(x, y)dydx=F(c, d)-F(c, b)-F(a, d)+F(a, b)$と表わされる

（証明）定理１の証明より

$\int_a^x\int_b^y f(x, y)dydx$は$f(x, y)$の二重原始関数だから，定理２より

$\int_a^x\int_b^y f(x,y)dydx=F(x,y)+\varphi(x)+\psi(y)$——(1)と表わされる。

(1)において$x=a$とおき

$0=\int_a^a\int_b^y f(x, y)dydx=F(a, y)+\varphi(a)+\psi(y)$——(2)

(1)において$y=b$とおき

$0=\int_a^x\int_b^b f(x, y)dydx=F(x, y)+\varphi(x)+\psi(b)$——(3)

(1)において$x=a$，$y=b$とおき

$0=\int_a^a\int_b^b f(x, y)dydx=F(a, b)+\varphi(a)+\psi(b)$——(4)

$\therefore\int_a^x\int_b^y f(x, y)dydx=F(x, y)-F(a, y)-F(x, b)+F(a, b)$——(1)−(2)−(3)+(4)

この式において，x，yをそれぞれc，dで置き換えれば証明は完了する。

注意，勿論$\int_b^d\int_a^c f(x, y)dxdy=F(c, d)-F(c, b)-F(a, d)+F(a, b)$

例1. $\int\int xy(x-y)\,dxdy=\int\left(\frac{x^3}{3}y-\frac{x^2}{2}y^2\right)dy=\frac{x^3y^2}{6}-\frac{x^2y^3}{6}=\frac{x^2y^2}{6}(x-y)$

$\therefore\int_0^b\int_0^a xy(x-y)\,dxdy=\frac{a^2b^2}{6}(a-b)$

例2. $\int\int\sin(x+y)dxdy=\int\{-\cos(x+y)\}dy=-\sin(x+y)$

$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dydx=-\sin\pi+\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=2$，又，$\int_0^b\int_0^a\sin(x+y)\,dxdy=-\sin(a+b)+\sin b+\sin a$

例3. $\int\int xy\,dxdy=\frac{x^2}{2}\,\frac{y^2}{2}=\frac{x^2y^2}{4}$

$\therefore\int_0^a\int_0^b xy\,dy\,dx=\frac{a^2b^2}{4}$

例4. $\int\int xy^2dxdy=\frac{x^2}{2}\,\frac{y^3}{3}=\frac{x^2y^3}{6}$

$\therefore\int_a^b\int_c^d xy^2dydx=\frac{1}{6}(b^2d^3-b^2c^3-a^2d^3+a2c^3)=\frac{1}{6}(b-a)(b+a)(d-c)(d^2+dc+c^2)$

例5. $\int\int \cos(x+y)\,dx\,dy=-\cos(x+y)$

$\therefore \int_a^b\int_c^d \cos(x+y)\,dy\,dx=-\cos(b+d)+\cos(b+c)+\cos(a+d)-\cos(a+c)$

昭和44年9月22日提出