

フィボナッチ数列と複素力学系

川部 健*・近藤芳朗†

Fibonacci Series and Complex Dynamical System

Takeshi KAWABE* and Yoshiro KONDO†

Fibonacci series and related ones to this can be found in various interesting creations of the natural and the art worlds. The properties of the series are reviewed, and similar behaviors to those in the complex dynamical system are also introduced where the period adding rule, the winding number sequence and others of the Mandelbrot sets exhibit.

1 はじめに

フィボナッチ数列は、イタリアの数学者 *Leonardo da Pisa* (愛称 *Fibonacci*, 1174~1250) が著書『算盤の書』の中の「ウサギの問題」でフィボナッチ数として紹介されているのが始まりとなっている。この有名な数列は

$$\{F_n\} : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots \quad (1)$$

で与えられ、

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad (2)$$

の関係を満たしている。(2)式がフィボナッチ協会(1963年2月以来、雑誌 *The Fibonacci Quarterly* という雑誌が刊行されている)で定義されているフィボナッチ数列である。また、初期値が $F_1 = a, F_2 = b$ で定義される場合の数列は、一般フィボナッチ数列と称される。かの有名な惑星に関する3法則を発見した J. Kepler (1571-1630) もこの数列に非常な関心を示していて、この数列の比 F_{n+1}/F_n は n が大きくなるに従い黄金比 $\varphi \equiv (\sqrt{5} + 1)/2 = 1.61803\dots$ (φ の代わり τ もよく使われる) に近づくことを述べている[1]。こ

*一般科目 (物理)

†川崎医科大学 情報科学 (物理)

平成11年8月31日受理

の1つの単純な数列が大きな関心を集めるようになったことは、この数列がもつ特異な性質と共に、植物や動物の形態、或いは、美術、建築など芸術の様々なところでこの数列が関係しているからに他ならない。フィボナッチ数を紹介した著書として、コクセター『幾何学入門』[2]、伏見康治、外『美の幾何学』[3]、マーチン・ガードナー『おもしろ数学パズル』[4]、佐藤修一『自然にひそむ数学』[5]、科学雑誌[6]など枚挙に暇がない。物理学の分野においても、フラクタル性や周期性とアモルファス構造の中間の性質をもつ結晶、準結晶の物性を研究する対象として、フィボナッチ格子[7],[8]が注目されてきた。また、非線形現象において、モード・ロック状態が壊れ、準周期を経てカオスに至るプロセスで、周期加算則や *winding number* が作り出す数列の振舞い[9]はフィボナッチ数列やこれに関連した数列と類似の振舞いを示す。

この小論において、フィボナッチ数が示す基本的な性質や植物や動物の形態学上に現れる例を上述の文献を参照しながら *review* し、その調和的な数列の振舞いがもつ普遍性と複素力学系もまたこれに類似した、或いはもっと一般的な数列の振舞いが内在していることを示す。

2 フィボナッチ数列の振舞い

(1)に掲げたフィボナッチ数列 $\{F_n\}$ を縦軸に指数表示で表すと図1のように、きれいな直線

$$\ln F_n = -1.27 + 0.480n \quad (3)$$

に従って変化している。このようなことから、フィボナッチ数 F_n の振舞いを $r = \ln F_n$, $\theta = n\pi/4$ として、2次元空間に表示すると図2のようならせんを描くことが分かる。それ故、このらせんは《対数らせん》としてアルキメデスのらせんと並んでよく知られている。この対数らせんは中心から引いた直線が接線となす角がらせんの位置に関係なく一定(証明は容易)であることから、等角らせんとも呼ばれ、哲学者デカルトや流体の定理で有名なベルヌーイもこのらせんのもつ魅力に心酔したようである。

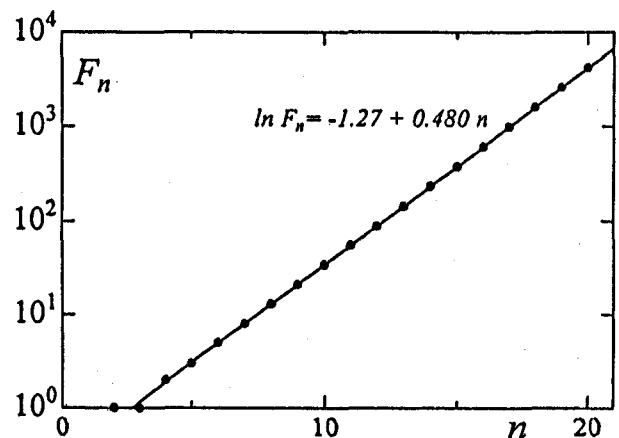


図1. フィボナッチ数列の変化

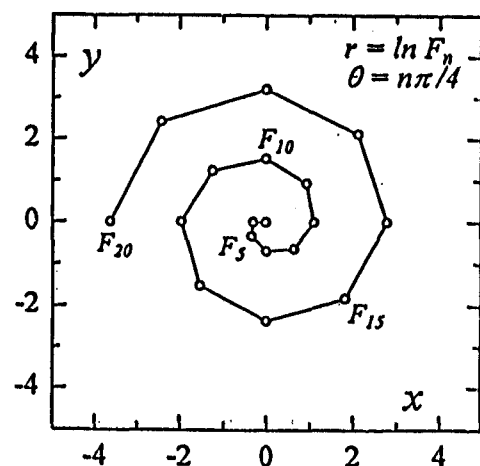


図2. フィボナッチ数列と対数らせん

2.1 フィボナッチ数列の一般項

フィボナッチ数列の一般項 F_n は

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \quad (4)$$

で与えられるが[10], この結果を母関数の方法で導いてみよう. フィボナッチ数 F_k を係数にもつ無限級数 $G(t)$ を以下のように定義する.

$$G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k t^k \quad (5)$$

この関数 $G(t)$ は, (2) の関係式を用いて次のように変形することができる.

$$\begin{aligned} G(t) &= F_1 t + \sum_{k=2}^{\infty} F_k t^k \\ &= F_1 t + \sum_{k=2}^{\infty} (F_{k-1} + F_{k-2}) t^k \\ &= F_1 t + \sum_{k=1}^{\infty} F_k t^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} F_k t^{k+2} \\ &= t + t \sum_{k=1}^{\infty} F_k t^k + t^2 \sum_{k=1}^{\infty} F_k t^k. \end{aligned} \quad (6)$$

ここで, $F_0 = 0, F_1 = 1$ を用いた. 以上より

$$G(t) = t + t G(t) + t^2 G(t), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{t}{1-t-t^2} \\ &= \frac{t}{(1-\alpha t)(1-\beta t)}. \end{aligned} \quad (8)$$

上式で α, β は方程式 $t^2 + t - 1 = 0$ の解

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad (9)$$

で与えられる. (8) 式の $G(t)$ は容易に変形できて,

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left\{ \frac{1}{1 - \alpha t} - \frac{1}{1 - \beta t} \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \sum_{k=0}^{\infty} \{ (\alpha t)^k - (\beta t)^k \} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} t^k, \end{aligned} \quad (10)$$

のように表される. (5), (10) 式より

$$F_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

となるから, (9) を代入すると (4) 式が得られる.

2.2 数列 $\{a_n\}$ の振舞い

フィボナッチ数の相前後する比の数列 $\{a_n : a_n = F_n / F_{n+1}\}$ の振舞いを調べてみよう. 即ち,

$$\{a_n\} : \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \dots \quad (12)$$

この数列 $\{a_n\}$ は n の増加とともに, 図 3 のように

$$a_{\infty} = \beta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.61803\dots \quad (13)$$

のまわりを順次上下に振動をしながら黄金比 $\beta = \varphi^{-1}$ に近づく. 図 3 の (a) の点線の枠内を縦方向に 40 倍した図が (b) であり, 更に (b) 図の点線枠内を縦方向に 46.5 倍した図が (c) である. これから数列 $\{a_n\}$ が *self-affine fractal* な (等方的でなく, 縦方向にだけ縮小した形が相似形をなすという意味をもつ) 振舞いを示すことが分かる. (2) 式から数列 $\{a_n\}$ について

$$a_n = \frac{1}{1 + a_{n-1}} \quad (14)$$

のような関係があつて, これから a_n が 1 の連分数展開

$$a_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (15)$$

で表され, 数式からもそのフラクタル性が理解できる. また, この数列 $\{a_n\}$ は次のような特徴をもつ.

$a_n = p/q, a_{n+1} = p'/q'$ とおくと、 $a_{n+2} = (p + p')/(q + q')$ の関係を満足し、 a_{n+2} は a_n と a_{n+1} の間の大きさの分数である。ここで、 p, q, p', q' は正整数である。

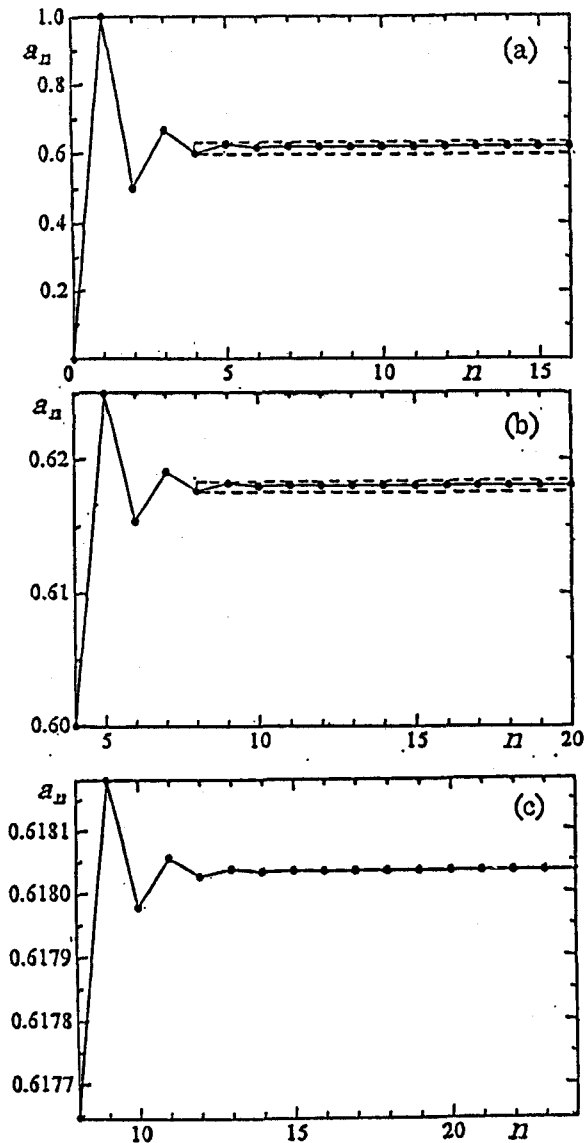


図3. 数列 $\{a_n\}$ のフラクタルな振舞い

3 自然の中のフィボナッチ数

I. Stewart は「ひまわりのらせんはどうしてできた？」という記事[11]の中に「... ゆりの花びら

は3枚だし、キンポウゲは5枚、マリーゴールドは13枚、アスターは21枚、それからほとんどのひな菊は34枚か55枚か89枚よ。これ以外の枚数の花びらを持つ花はそう簡単に見つからないわ。例外もあるんだけど、それは今の枚数が倍になった場合と、3枚、4枚、7枚、11枚、18枚、... という特異列とよばれる場合が主なものね」という文章がある。3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 という数値はフィボナッチ数であり、また、3, 4, 7, 11, 18, ... という特異列はフィボナッチ数列の基本的な式 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ と同じ関係式を満たしている。厳しい自然の中で咲くチングルマ、リュウキンカ、ウメバチソウなど高山植物には花びらの数が5枚のものが多く、他に3枚、8枚など不思議にフィボナッチ数のものがある。

自宅の近くの畑に咲いていたひまわりの花を一つとって帰り、虫めがねで調べてみた。その中心部にある小花(図4)は55本の左回転のらせんと89本の右回転のらせんをつくっている。この数字は隣り合ったフィボナッチ数 F_{10}, F_{11} であり、そのらせんは対数らせんになっている。ひまわりのこの小花の右巻き、左巻きのらせんの本数は34と55か、55と89か89と144の隣接したフィボナッチ数の組み合わせになっていることが知られている[11]。オウム貝などの巻き貝、あわびなどの貝類の成長も対数らせんになっているが、その理由は相似形を保ちながら一定の比率で成長するからに他ならない。貝殻の形態は、種によってらせんの回転角が異なっている[12]。

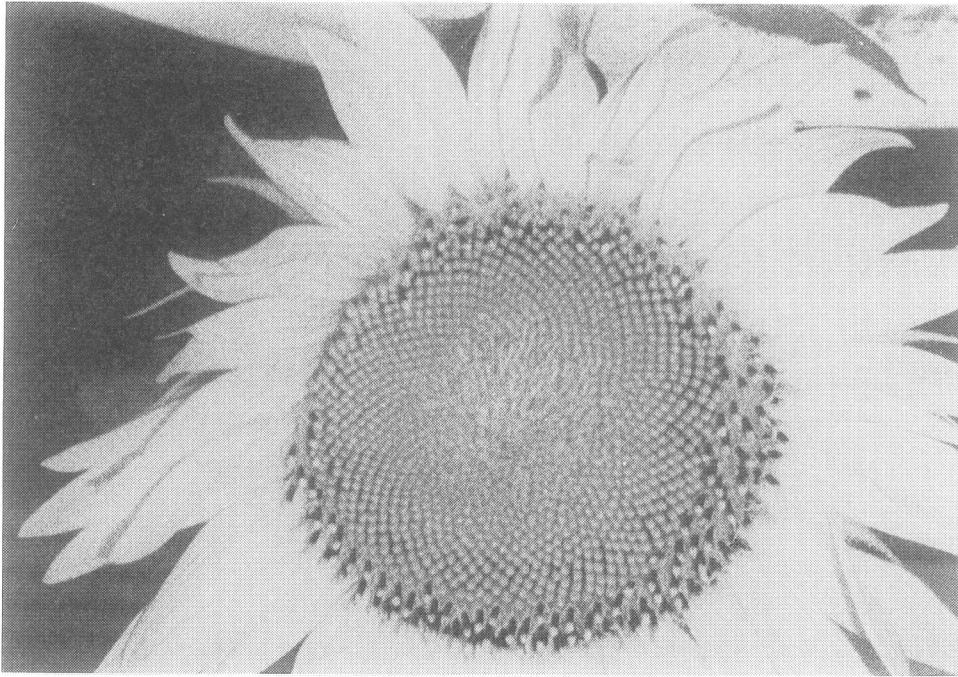


図4. ひまわりの小花の対数らせん

植物が葉を出す規則，葉序は葉の大きさや形に依らず，また，植物の育つ環境にも依らず種によって決まっている．即ち，開度＝回転数／葉の数（隣接する葉のなす角度，ラジアン）を定義するとき，開度＝ F_n/F_{n+2} で決まっており， n が植物の種類に依っている．例えば，ブナ，カヤツリグサは $n = 2$ ；開度＝ $1/3$ ，即ち，最初の葉の位置から数えて，一回転する間に3枚の葉をつけている植物である．従って，隣接する葉のなす角は120度である．サクラ，カシ，ナラは $n = 3$ ；開度＝ $2/5$ で隣接する葉のなす角は144度，ポプラ，ナシは $n = 4$ ；開度＝ $3/8$ で隣接する葉のなす角は135度．究極的には， $n \rightarrow \infty$ の開度＝ $\varphi^{-2} \times 360^\circ = 137.5$ 度（黄金角）を与える．フィボナッチ数の比で与えられる開度は，その種の植物が葉が互いに重ならないように太陽の光を受けることのできる最も合理的な角度になっていると考えられている．

4 複素力学系

乱流などに見られる乱れた系は，例えばレイノルズ数を変えていくと定常状態からカオスの状態へと変化していく．このような規則的な状態から乱れた状態への遷移を考察するとき，様々な数学モデルが用いられる．*Sine Circle Map* [9] もこのような現象を創出する代表的なモデルである．3で植物の葉序について開度＝回転数／葉の数によって2枚の隣接する葉の間隔を角度によって表した．この開度に類似する量として $w = p/q$ で定義される *winding number* がある．ここで， q は周期， p は回転数であるから，力学系を差分方程式で定義するとき，1ステップで平均どれだけ回転するかという回転角の大きさを与える．ここに現れる周期 q や *winding number* w などが制御パラメータに対して示す変化はフィボナッチ数列の変化と

類似している。特に、複素解析性、即ち *Cauchy-Riemann* の関係を満足する制約のため、複素力学系ではカオス領域が測度0でしか出現しない[13] ことや、そこに現れる量の振舞いはフィボナッチ数列のように極めて調和的になっている。このような振舞いの例を以前に著者らが行った対数写像 $Z \mapsto \ln Z + C$ [14]–[16], 2次写像 $Z \mapsto Z^2 + C$, 指数写像 $Z \mapsto Ce^Z$ [17] の結果を掲げて説明すると共に、2次写像について特定の条件を付加して行われた解析[18]を再現する。

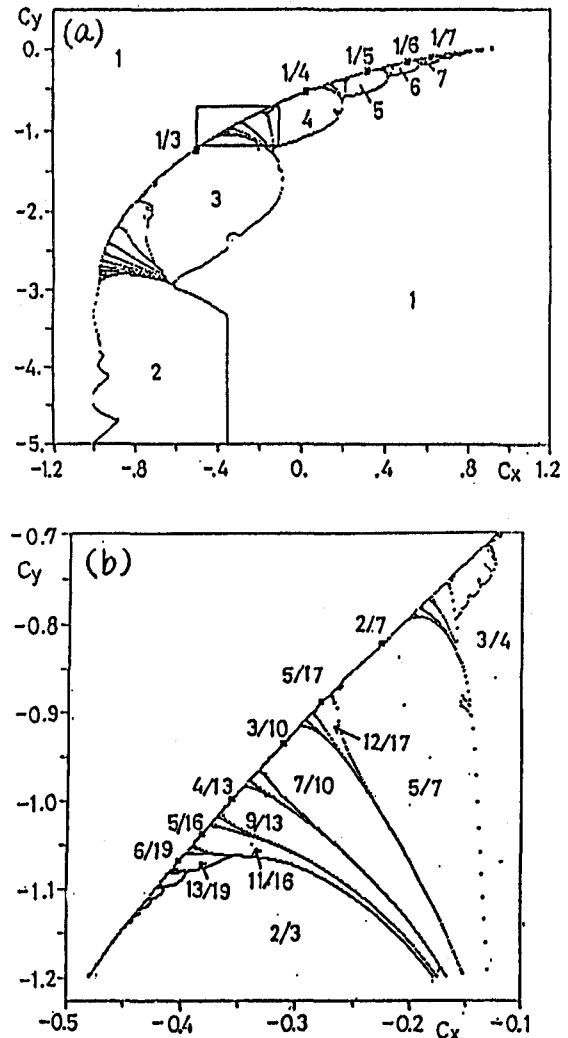
図5は対数写像 $Z \mapsto \ln Z + C$ を $-\pi/2 \leq \arg(Z) < 3\pi/2$ の条件のもとに複素平面 (C_x, C_y) にマンデルブロ集合を示したもので、整数はその領域の周期を、また $1/3$ などの分数は固定点 (周期1) 領域との境界線 (サイクロイド) 上の位置 Z^* (四角点) に関する。

$$Z^* = \ln Z^* + C, \quad Z^* = e^{i2\pi\Omega} \quad (16)$$

ここで、 $\Omega = p/q$ (p, q は整数値) で、 q は周期を示す。図5の四角点はその位置に相当する Ω を表す。(a)図の一部 (長方形の部分) を拡大すると (b)図のようになる。この図からこの複素力学系のフラクタル構造と境界線の位置 $\Omega = p/q$ から q 周期領域が広がっていることが分かる。その領域の *winding number* が $w = 1 - \Omega$ であることから、領域中の分数は w を示す。この(a),(b)の図から、3周期領域と4周期領域から7周期領域が、3周期領域と7周期領域から10周期領域が、或いは、7周期領域と10周期領域から17周期領域が発

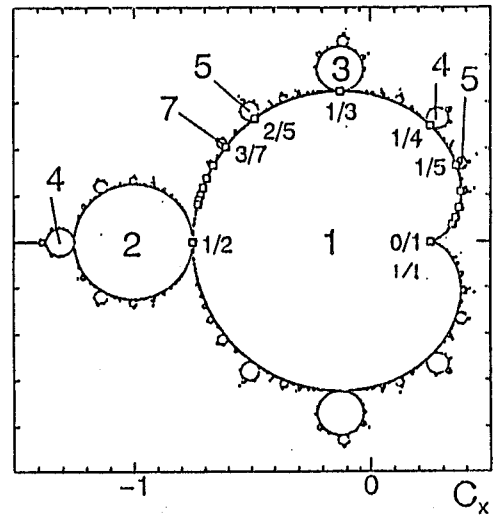
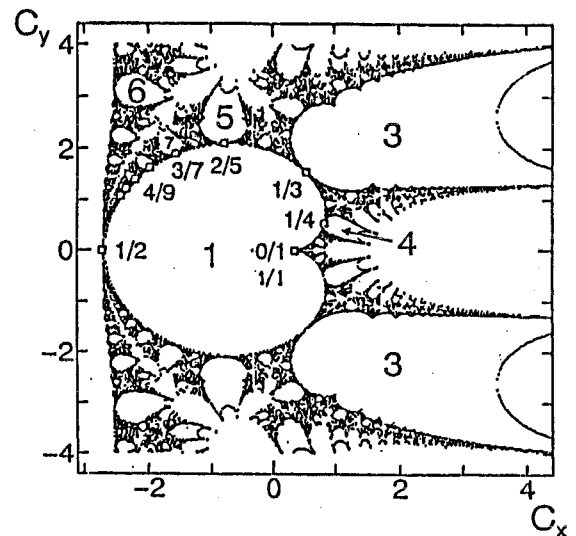
生していることが見いだされる。即ち、 q_1 周期領域と q_2 周期領域から q_3 領域が作られる

$$q_3 = q_1 + q_2 \quad (17)$$



と $3/4$ の領域から $5/7$ の領域が現れ, $2/3$ と $5/7$ の領域から $7/10$ の領域が現れる. 或いは, $5/7$ と $7/10$ の領域から $12/17$ の領域が現れている. その *winding number* 生成の規則は p/q と p'/q' から $(p+p')/(q+q')$ がつくられるということで, これは 2.2 で述べた相前後するフィボナッチ数列の比で定義される数列 $\{a_n\}$ と同じ性質をもつ. 但し, 次の数列の生成は p/q と $(p+p')/(q+q')$ の間から作ってもよいし, p'/q' と $(p+p')/(q+q')$ から作ってもよいので, 数列とそのまま対応させることはできない. このような *winding number* 生成のプロセスは 1 本の木の成長に例えられ, *Farey Tree* と呼ばれる.

2 次写像 $Z \mapsto Z^2 + C$, 指数写像 $Z \mapsto Ce^Z$ について, 対数写像と同様のマンデルブロ集合を複素平面 (C_x, C_y) に描くと, それぞれ図 6, 7 [17] のようになる. 図の数値は対数写像の場合と同様で, 整数値はその領域の周期, 分数は固定点領域との境界線上の位置を Ω で表している. 図 6, 7 には *winding number* を記入していないが, 例えば, これらの図の 4 周期領域の w は $3/4$ になる (或いは, 回転の向きを逆にとれば $1/4$ になるから $w = \Omega$ としてもよい). 従って, w の代わりに Ω について考えれば, $1/2$ と $1/3$ の間には $(1+1)/(2+3) = 2/5$ の位置があり, $1/3$ と $2/5$ の間には $(1+2)/(2+5) = 3/7$ の位置があって, これらの複素力学系においても周期加算則とフィボナッチ数列的な *Farey Tree* の存在を見ることができる.


 図 6. 2 次写像の周期と Ω

 図 7. 指数写像の周期と Ω

2 次写像において, 初期値 $Z = 0$ から始めて固定点, 或いは周期点に到達するまでに取りうる数値のうち, 最小値に到達するまでの繰り返し (*iteration*) 回数の分布は, 興味深い結果を与える [18]. 即ち, $Z \mapsto p_c(Z) \equiv Z^2 + C$ とするとき,

$$\begin{aligned}
 \alpha(C) &= \inf\{|p_c^k(0)| : k = 1, 2, \dots\} \\
 &= |p_c^m(0)|
 \end{aligned} \tag{18}$$

によって得られる *index m* の分布を数値解析で

求めると図8のようになる。この図からも周期加算則と類似した領域の生成を見ることができる。

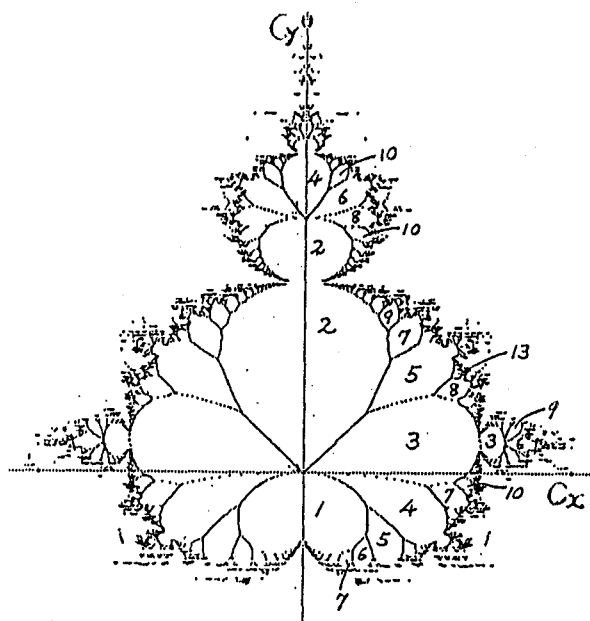


図8. $index\ m$ の分布

5 まとめ

フィボナッチ数列という一つの数列が自然界の様々なところに登場することを多くの文献を参照しながら簡単な紹介を行った。本論では省略したが、美術や建築などにおいてもこの数列が出てくる。何故このように広範に見いだされ、或いは利用されてきたのだろうか。その理由は、この数列の前後の比 a_n が極限において最も調和的な黄金比（無理数）になること、また、数列 $\{a_n\}$ が有理数でこの黄金比に近づくための最も *real* な数列になっていることにある。葉序について言えば、葉の数や回転数は整数でその比である開度は有理数である。太陽の光を最も合理的に受けることで

きる開度は極限的には黄金比で表されるが、フィボナッチ数はこの数値に最も近い簡単な有理数を表現している。フィボナッチ数列で表される世界は、常に合理的、調和的性格を持っている。さらに、この数列は対数らせんを作り出すが、そのフラクタル性は、巻き貝の成長など自己相似性をもつ生物の最も自然な姿である。生物の成長のモデルはその成長の最も顕著な時期においてフィボナッチ的と言えるだろう。

フィボナッチ数列に関連して、最後の節で3種類の複素力学系を取り上げた。そのいずれも周期加算則などフィボナッチ数列と類似な数列が作り出され、フラクタルなマンデルブロ集合を見いだすことができる。一般の実数の力学系、*Coupled Logistic Map* や *Sine Circle Map* でも周期加算則を見いだすことができるが[19]、カオスの領域が複雑に入り組んで、ここで示したようなきれいなマンデルブロ集合にはならない。複素力学系はその分岐図があまりにきれいすぎて、カオスのような乱れた状態が通常の状態では測度0でしか存在しないことが逆に興味を削いでいるのかも知れない。また、複素力学系には周期 n 倍分岐のような周期倍分岐を一般化したような法則性を解析的に導き出すことが可能であり、フィボナッチ数列のような調和性と共に、これを拡張したような一般性が秘められていて興味深いモデルとして利用することができる。

参考文献

- [1] J. Kepler, *Gesammelte Werke* Vol.4, 1941, Beck, Munich.
- [2] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, 1965, John Wiley : 銀林 浩訳『幾何学入門』, 明治図書.
- [3] 伏見康治, 安野光雅, 中村義作,『美の幾何学』1979, 中公新書.
- [4] Martin Gardner, *The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles Diversions*, 1961, Simon and Schuster Inc. : 金澤養訳『おもしろ数学パズル』1981, 現代教養文庫.
- [5] 佐藤修一,『自然にひそむ数学』1998, Blue Backs 講談社.
- [6] 数学セミナー (日本評論社), 数理科学 (サイエンス社), 日経サイエンス (日本経済新聞社) などがある.
- [7] D. Schechtman, I. Blech, D. Gratias and J. W. Cahn, *Phys. Rev. Lett.* 53, 1951(1984).
- [8] 甲元真人, 日本物理学会誌, 第42巻(1987) 433-441.
- [9] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos*, Chap. 6, VCH, 1995.
- [10] 森口繁一, 宇田川圭久, 一松 信,『数学公式 II』岩波全書.
- [11] Ian Stewart, *Daisy,Daisy, Give Me Your Answer, Do* : 田中裕一訳, 日経サイエンス No. 3(1995).
- [12] 志方守一, 生物科学, 第24巻(1972) 157-168.
- [13] 田中昌昭, 阿部利則, 川部 健, 物性研究 (京都大学, 基礎物理学研究所), 第64巻(1995) 259-281.
- [14] 川部 健, 近藤芳朗, ” 対数写像が描くフラクタルの妙” 科学朝日, No.1,133(1991).
- [15] T. Kawabe and Y. Kondo, *J. Phys. Soc. Jpn.* 62, 497(1993).
- [16] M. Tanaka and T. Kawabe, *J. Phys. Soc. Jpn.* 62, 3767(1993).
- [17] M. Tanaka and T. Kawabe, *Phys. Lett. (North Holland) A* 199, 180(1995).
- [18] H. -O. Peitgen and P. H. Richter, *The beauty of Fractals*, Springer-Verlag, 1986; 宇敷重広訳『フラクタルの美』1988, シュプリンガー・フェアラーク東京.
- [19] K. Satoh and T. Aihara, *J. Phys. Soc. Jpn.* 59, 1123, 1184(1990).